

PROCEEDINGS

VOLUME XLIV

No. 1

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: M. W. WOERDEMAN

CONTENTS

- VENING MEINESZ, F. A.: "Gravity over the Hawaiian Archipelago and over the Madeira area; conclusions about the Earth's crust", p. 2.
- BURGERS, J. M.: "Some considerations on the development of boundary layers in the case of flows having a rotational component", p. 13.
- JAEGER, F. M., and J. A. VAN DIJK: "On the Preparation of β -Phenyl-isopropylamine (Benzedrine), of the isomeric α -Phenyl-propylamine and of β -Phenyl- α -propylene-diamine and on the Resolution of these Bases into their Optically-active Antipodes". I, p. 26.
- MOLENAAR, P. G.: "Ueber die Differentialkovariante erster Ordnung der binären kubischen Differentialform". (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK), p. 41.
- BRUIJN, N. G. DE: "Ein Satz über schlichte Funktionen". (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 47.
- MONNA, A. F.: "Sur un principe de variation de GAUSS dans la théorie du potentiel". (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 50.
- KOKSMA, J. F., und B. MEULENBELD: "Ueber die Approximation einer homogenen Linearform an die Null". (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 62.
- KOKSMA, J. F.: "Ueber die Diskrepanz (mod 1) und die ganzzahligen Lösungen gewisser Ungleichungen". (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 75.
- MEIJER, C. S.: "Neue Integraldarstellungen für WHITTAKERSche Funktionen". (Erste Mitteilung). (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 81.
- KONING, L. P. G.: "On gersdorffite in the Falconbridge ore deposit, Sudbury District, Ontario, Canada". (Communicated by Prof. H. A. BROUWER), p. 93.
- HEERING, J.: "Cordieritpseudomorphosen in Sanidin-Albit-Rhyoliten von Tandjoeng Illipoi, Wetar (Niederl. Ost-Indien)". (Communicated by Prof. H. A. BROUWER). (With one plate), p. 102.
- RÉVÉSZ, G.: "Die menschlichen Kommunikationsformen und die sog. Tiersprache". III. (Communicated by Prof. A. DE KLEYN), p. 109.

Geophysics. — *Gravity over the Hawaiian Archipelago and over the Madeira area; conclusions about the Earth's crust.* By F. A. VENING MEINESZ.

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

The new tables for isostatic reduction of gravity results according to different degrees of regionality of the compensation enable us to make a new attack on the problem of the excess of gravity found on several oceanic islands. We shall take this problem up here for two areas where a fairly large number of gravity determinations is available, for the Hawaiian Archipelago and for the Madeira area. For the first we dispose of fifteen gravity stations of the U.S. Coast and Geodetic Survey on the islands, i.e. six on Hawaii, six on Oahu and three on the other islands, and further of a profile of sea-stations from ENE to WSW, observed by the author during his crossing of the Pacific in Hr. Ms. Submarine K 13 in 1926. In the table below and in the map, the stations of the Coast and Geodetic Survey are indicated by the numbers 1—15 as e.g. mentioned on page 54 of HEISKANEN's catalogue of the isostatically reduced gravity stations of 1939, and the sea-stations by the numbers 110—115 corresponding to the station-list in "Gravity Expeditions at Sea", 1923—1932, on page 90. For the Madeira area we have two profiles of sea-stations at right angles to each other, in the directions W—E and N—S, observed during the gravity expeditions of Hr. Ms. O 13 in 1932 and Hr. Ms. K 18 in 1934, supplemented by two land-stations on Madeira observed by the writer when he stayed at the island during the last of these expeditions. Of the numbers by which they are indicated in the table below and in the map, only 467—471 may be found in the above-mentioned list of "Gravity Expeditions at Sea"; the other stations, including 469a and 469b, have still to be published.

So for both areas we can compare the gravity on the islands with that in the neighbourhood at sea. The stations show great differences of elevation, ranging for the Hawaiian Archipelago from 3981 m above sea-level to 5430 m below it and for the Madeira group from 1530 m above to 4430 m below. This is evidently favourable for the drawing of conclusions about the location of the isostatic compensation-masses.

The areas are similar in this regard that the islands in both are generally assumed to be of a purely volcanic origin. In both also they rise from a deep ocean-bottom without a transition of lesser depths, as is the case e.g. for the Azores and other islands on the Mid-Atlantic ridge. These points are important for the interpretation of the gravity anomalies; they

make it improbable that the areas have recently been subject to folding or overthrusting of the crustal layers. From a geophysical standpoint the two areas differ. The Hawaiian Archipelago is situated in the middle of the Pacific, east of the andesite line, where most geophysicists, on the base of the seismic evidence, suppose no sialic layer to be present, or at most only a thin one, while Madeira is in the East Atlantic where generally a sialic layer of at least ten kilometers thickness is assumed.

As we may expect in connection with the strong irregularity of the topography, the table below shows very large free-air anomalies; in the Hawaiian area we see even values of + 698 mgal and + 662 mgal and in the second area a value of + 376 mgal. In the next column of the table, in the top-values of each set of three, we find the anomalies after isostatic reduction according to the AIRY-HEISKANEN system of local compensation; for the normal thickness of the crust a value of 30 km has been adopted. We see that, though the reduction has reduced the anomalies, they still remain large; four of the six anomalies on the island of Hawaii are about + 250 mgal and many of the other anomalies show likewise high values. So we have typical instances here of the high positive anomalies that have so often been found on oceanic islands. For both areas the anomalies in the stations over the deep sea in the neighbourhood are small.

For explaining the positive anomalies on the islands we might in the first place think of the possibility that the volcanic topography is recent and for a great part not isostatically compensated because the equilibrium has not yet been readjusted. As the writer will show in a future more detailed paper, this supposition is less effective for reducing the anomalies than that of a regional compensation of the topography which we shall arrive at in the course of this paper. The writer thinks, moreover, that the assumption of non-compensation of a great part of the topography is out of the question for the areas under consideration because the tendency towards adjustment of the equilibrium must imply a sinking of the islands at a fairly large speed and no such sinking is going on. We shall suppose that we may apply the formula for the rate of readjustment which the writer derived a few years ago from the evidence in Scandinavia ¹⁾. If A is the anomaly, dA its rate of disappearance per century and L the diameter of the area in thousands of kilometers, he found

$$dA = 3\frac{1}{2} \times 10^{-3} AL \text{ per century.}$$

Introducing for the island of Hawaii a diameter of 100 km and a value of A of 250 mgal, we find dA to be 0.09 mgal per century. This corresponds to a subsidence of about one meter in that time. There is, however, no evidence of such a subsidence of Hawaii nor of the other islands. The three western islands, e.g., where gravity measurements have been made and

¹⁾ F. A. VENING MEINESZ, The Determination of the Earth's plasticity from the postglacial uplift of Scandinavia; isostatic adjustment; Proc. Vol. XL, 8, 1937, p. 662.

where likewise large positive anomalies have been found, viz East Island, Nihoa and Necker, are surrounded by extensive shoals of depths of resp. about 10 m, 40 m and 25 m. As e.g. exposed by HAROLD S. PALMER in his publications on the smaller islands of the Hawaiian group ¹⁾ the general opinion is that these submarine terraces are the surfaces of truncated volcanoes of which the top parts have been taken away by the action of the waves. Mr. PALMER also mentions benches along the shores of several islands caused by the relative lowering of sea-level. Both features clearly point to no strong downward movement having occurred in recent times. For Oahu there is indeed evidence of a subsidence of the island but on the other hand the area round Honolulu has doubtless risen in the last period and WENTWORTH and PALMER ²⁾ mention recent eustatic benches some 12 feet above sea-level for all the islands. So in general the evidence is certainly not in favour of a subsidence of the topography.

For Madeira we have to introduce somewhat smaller figures for the diameter of the island and for the mean of the three anomalies on the island, viz 50 km and 130 mgal. This leads to an estimate of the subsidence incase of non-compensation of about 25 cm per century. This is still a rather large amount and, as far as the writer knows, there is no evidence that such a movement has taken place; the geology on the contrary points to a rising of the island.

Ruling out the possibility of the volcanic topography being entirely or for the greatest part uncompensated, we come to another possible line of explaining the high positive anomalies. The isostatic reduction has been based as usual on the adoption of a density of 2.67 for the topography, and the volcanic rock constituting the islands may well be supposed to have a greater density. In the way described below, the writer has made an estimate of the results we should have obtained if we had adopted a density of 2.937 resp. of 3.07, i.e. ten resp. fifteen percent more than the above value, for all the matter above a depth of 4878 meters. For each station the results of this estimate have been given in the table of this paper below the results of the normal reduction. The last column indicates the density corresponding to the results of that line. Examining these results, we see at once that the introduction of the larger figures for the density indeed diminishes the anomalies, but that the decrease is small with regard to their total value. So it appears out of the question to make the anomalies disappear in this way; for this purpose we should require densities far above those possible for volcanic rock. So this effect explains a part of the anomalies but only a small part, and we shall have to continue our investigation of their cause. We first, however, shall indicate the way

¹⁾ HAROLD S. PALMER, *Geology of Kaula, Nihoa, Necker, and Gardner Islands and French Frigates Shoal*, Bishop Mus., Bull 35, 1927.

Id. *Geology of Lehua and Kaula Islands*, Bishop Mus., Occ. P. XII, 13.

²⁾ C. K. WENTWORTH and H. S. PALMER, *Eustatic bench of islands of the North Pacific*, *Geol. Soc. Am. Bull.* vol. 36, pp. 521—544, 1925.

in which the estimate of the effect of higher values for the rock-densities has been made.

These figures have been obtained by subtracting from the anomalies ten resp. fifteen percent of the combined effects of the topography and the compensation for the lettered Hayford-zones A to O, i.e. up to a distance of 166.7 km from the station, and further the combined effects of the attraction of a cylindrical mass of this same radius round the station, of a density of 0.267 resp. 0.400, reaching from sea-level down to a depth of 4878 meters, and of the isostatic compensation of this cylindrical mass. For the sea-stations the density of the cylindrical mass was adopted at 0.1642 resp. at 0.2463. We may explain this in the following way. By subtracting from the free-air anomalies 1.10 resp. 1.15 times the normal effects of the topography and the compensation for the lettered zones, we find the anomalies that would be brought about if inside a radius of 166.7 km the topography above sea-level had been taken away — supposing, as we do, that this topography has this greater density — and if the sea had been filled up with mass of a density of 1.10×1.642 resp. 1.15×1.642 , thus giving rise to a total density there of these values combined with the density 1.028 of sea-water. Together we should in this way get a density below sea-level of $2.67 + 0.1642$ resp. $2.67 + 0.2463$ reaching down to the sea-bottom. We further assumed a density of $2.67 + 0.267$ resp. $2.67 + 0.400$ below sea-level for the land-parts, reaching down to a depth of 4878 m. So, for bringing this back to the normal density of 2.67 we have further to subtract from our anomalies the attraction of a cylinder round the station of a radius of 166.7 km and of its isostatic compensation, the cylinder having a density of 0.267 resp. 0.400 and reaching down to a depth of 4878 m for the land area in it, and a density of 0.1642 resp. 0.2463, reaching down to the sea-bottom for the sea-area. This last schedule has been simplified by substituting cylinders of a uniform density, 0.267 resp. 0.400 for a land-station, and 0.1642 resp. 0.2463 for a sea-station, both reaching down to a depth of 4878 m. As the following figures show, the effect of these cylinders combined with that of their isostatic compensation is not large, and as also the mean sea-depth of the area surrounding the islands does not differ much from 4878 m, the simplification does not bring about errors exceeding a few milligal. For the effects of the cylinders and their isostatic compensation we found

	Topog. density	Effect
Land-stations	0.267	+ 7.3 mgal
	0.400	+ 10.6 mgal
Sea-stations	0.1642	+ 4.5 mgal
	0.2463	+ 6.5 mgal

Returning to our main discussion we have to take up again the problem of the cause of the positive anomalies. Obviously not much else is left than to suppose that the assumptions about the distribution of the isostatic compensation have been erroneous. The new tables for the case of regional isostatic compensation make it possible to try whether a regional distribution gives a better result. The table of this paper gives a series of columns of the figures found in this way; the radius of the area over which the compensation has been assumed to be distributed being successively 58.1 km, 116.2 km, 174.3 km and 232.4 km; the smallest radius of the tables, 29.05 km, has been omitted. The compensation is not supposed to be evenly distributed over this area but in such a way that it has a maximum value under the station in the middle of the area and becomes zero towards the boundary; for details the writer may refer to a few papers on this subject ¹⁾. Besides applying the tables, values have also been derived for higher densities of the topography according to the method indicated above; the table gives them in the second and third lines for each station. For the compensation of the cylinder the attraction of which had to be subtracted, the same system of compensation has been applied. According to this, the following figures for the combined effects of the cylinder and of its compensation have been subtracted:

	Topog. dens.	$R = 58.1$ km	116.2 km	174.3 km	232.4 km
Land-stations	0.267	+ 7.6	+ 8.1	+10.7	+17.6 mgal
	0.400	+10.9	+11.8	+15.8	+26.3 mgal
Sea-stations	0.1642	+ 4.7	+ 5.0	+ 6.6	+10.8 mgal
	0.2463	+ 6.7	+ 7.3	+ 9.7	+16.2 mgal

Examining the results of these reductions we see that the method is indeed successful and that the remaining anomalies for the great degrees of regionality are relatively small; they become still smaller by adopting higher values for the density of the topography, which as we mentioned already, are certainly nearer the truth for volcanic rocks than the normal value of 2.67. Generally speaking, we may say that the greatest value of R combined with a density of 2.937, or the second greatest value of R combined with a density of 3.07 give the smallest values for the anomalies.

¹⁾ F. A. VENING MEINESZ, Fundamental tables for regional isostatic reduction of gravity values, Verh. Kon. Ned. Akad. v. Wet. 1 Sect. DI XVII, 3.

F. A. VENING MEINESZ, Tables fondamentales pour la réduction isostatique régionale, Bull. Géodésique, 63.

F. A. VENING MEINESZ, Tables for the regional and local isostatic reduction (Airy system) for gravity values, Publ. Netherlands Geod. Comm. 1941. This publication contains the tables used for the reductions mentioned here.

Gravity in the Hawaiian Archipelago
(anomalies in milligal)

Station Latitude N Longitude W	Elevation meter	free -air anom.	local isost. $T = 30$	regional isostatic anom. $T = 30$ kilometers				local isost. $T = 80$	dens. topog.
				$R = 58.1$	116.2	174.3	232.4		
2 Mauna Kea, Hawaii, 19 48.9 155 28.8	+3981	+ 662	+ 249 + 205 + 182	+ 225 + 177 + 154	+171 +127 +105	+119 + 60 + 30	+ 81 + 15 - 18	+ 97	2.67 2.937 3.07
3 Kalaieha, Hawaii, 19 42.2 155 27.9	+2030	+ 495	+ 267 + 241 + 228	+ 240 + 211 + 196	+181 +146 +129	+130 + 88 + 68	+ 91 + 43 + 19	+ 106	2.67 2.937 3.07
4 Kawaihae, Hawaii, 20 02.1 155 49.4	+ 2	+ 164	+ 99 + 90 + 85	+ 86 + 75 + 69	+ 49 + 34 + 27	+ 9 - 11 - 21	- 26 - 53 - 66	- 23	2.67 2.937 3.07
5 Kilauea, Hawaii, 19 25.4 155 15.7	+1211	+ 428	+ 248 + 227 + 216	+ 225 + 201 + 189	+169 +139 +124	+117 + 82 + 64	+ 85 + 43 + 22	+ 103	2.67 2.937 3.07
6 Mauna Loa, Hawaii, 19 29.8 155 34.8	+3970	+ 698	+ 270 + 224 + 200	+ 241 + 192 + 167	+182 +127 +100	+129 + 67 + 36	+ 92 + 24 - 10	+ 111	2.67 2.937 3.07
7 Hilo, Hawaii, 19 44.0 155 03.1	+ 5	+ 249	+ 152 + 139 + 133	+ 135 + 121 + 113	+ 92 + 73 + 63	+ 50 + 25 + 13	+ 21 - 10 - 25	+ 32	2.67 2.937 3.07
1 Honolulu, Oahu, 21 18.1 157 51.8	+ 6	+ 224	+ 115 + 100 + 93	+ 97 + 80 + 72	+ 59 + 38 + 28	+ 31 + 6 - 6	+ 11 - 19 - 34	+ 12	2.67 2.937 3.07
8 Niu, Oahu, 21 17.1 157 44.1	+ 2	+ 221	+ 117 + 103 + 96	+ 103 + 88 + 80	+ 68 + 48 + 39	+ 37 + 13 + 1	+ 14 - 15 - 30	+ 18	2.67 2.937 3.07
12 Kahuku, Oahu, 21 42.4 157 58.5	+ 2	+ 215	+ 83 + 66 + 58	+ 62 + 43 + 34	+ 34 + 12 + 1	+ 12 - 13 - 26	- 2 - 33 - 48	- 4	2.67 2.937 3.07
13 Kaaawa, Oahu, 21 32.4 157 50.6	+ 1	+ 236	+ 123 + 108 + 100	+ 103 + 86 + 78	+ 68 + 47 + 37	+ 40 + 15 + 3	+ 22 - 8 - 23	+ 25	2.67 2.937 3.07
14 Wahiawa, Oahu, 21 29.6 158 02.0	+ 264	+ 252	+ 114 + 97 + 88	+ 93 + 73 + 63	+ 54 + 30 + 19	+ 26 - 1 - 15	+ 9 - 24 - 41	+ 12	2.67 2.937 3.07
15 Waianae, Oahu, 21 26.0 158 10.9	+ 3	+ 298	+ 179 + 164 + 156	+ 161 + 144 + 135	+127 +106 + 95	+101 + 76 + 63	+ 84 + 54 + 39	+ 85	2.67 2.937 3.07

Gravity in the Hawaiian Archipelago
(anomalies in milligal). (Continued).

Station Latitude N Longitude W	Elevation meter	free -air anom.	local isost. $T = 30$	regional isostatic anom. $T = 30$ kilometers				local isost. $T = 80$	dens. topog.
				$R = 58.1$	116.2	174.3	232.4		
9 East Island, 23 47.0 166 12.5	+ 2	+ 315	+ 166 + 148 + 139	+ 139 + 118 + 108	+105 + 81 + 68	+ 82 + 54 + 40	+ 69 + 36 + 20	+ 74	2.67 2.937 3.07
10 Nihoa, 23 03.5 161 55.4	+ 15	+ 275	+ 118 + 99 + 90	+ 94 + 72 + 61	+ 60 + 34 + 22	+ 39 + 10 - 4	+ 26 - 7 - 24	+ 33	2.67 2.937 3.07
11 Necker, 23 34.7 164 42.4	+ 30	+ 295	+ 142 + 123 + 114	+ 118 + 97 + 86	+ 83 + 58 + 45	+ 61 + 33 + 19	+ 46 + 13 - 3	+ 51	2.67 2.937 3.07
110 Voyage Hr. Ms. K 13, 22 13 155 24	-4510	+ 3	- 5 - 6 - 7	- 7 - 9 - 10	- 10 - 12 - 13	- 6 - 8 - 9	0 - 1 - 2	- 5	2.67 2.937 3.07
111 Voyage Hr. Ms. K 13, 21 45 156 13	-5430	- 96	- 62 - 59 - 58	- 45 - 40 - 39	- 22 - 15 - 12	- 3 + 5 + 9	+ 5 + 13 + 17	- 21	2.67 2.937 3.07
112 Voyage Hr. Ms. K 13, 21 09.0 157 28.0	- 510	+ 165	+ 90 + 79 + 73	+ 78 + 65 + 59	+ 48 + 32 + 24	+ 17 - 3 - 13	- 8 - 34 - 47	- 8	2.67 2.937 3.07
113 Voyage Hr. Ms. K 13, 21 18.4 (Honolulu) 157 52.0	- 6	+ 213	+ 107 + 92 + 85	+ 90 + 74 + 66	+ 54 + 35 + 25	+ 25 + 1 - 11	+ 4 - 25 - 40	+ 8	2.67 2.937 3.07
114 Voyage Hr. Ms. K 13, 20 48 158 36	-4290	- 18	- 2 - 1 - 1	+ 7 + 8 + 9	+ 22 + 24 + 25	+ 33 + 36 + 38	+ 34 + 37 + 38	+ 10	2.67 2.937 3.07
115 Voyage Hr. Ms. K 13, 20 29 160 30	-4590	+ 14	+ 17 + 17 + 16	+ 18 + 17 + 16	+ 19 + 18 + 18	+ 23 + 23 + 23	+ 27 + 26 + 26	+ 19	2.67 2.937 3.07

This is a remarkable result because such a great degree of regionality of the isostatic compensation implies a rigid Earth's crust of a large thickness, viz of the order of 25 to 45 km ¹⁾). We shall afterwards shortly mention a few important conclusions that can be drawn from this result. We see that the result is valid for the Hawaiian Archipelago as well as for the Madeira area.

The anomalies have not quite disappeared by the regional reduction;

¹⁾ F. A. VENING MEINESZ, La réduction isostatique régionale, Bull. Géod. 29, 1931.

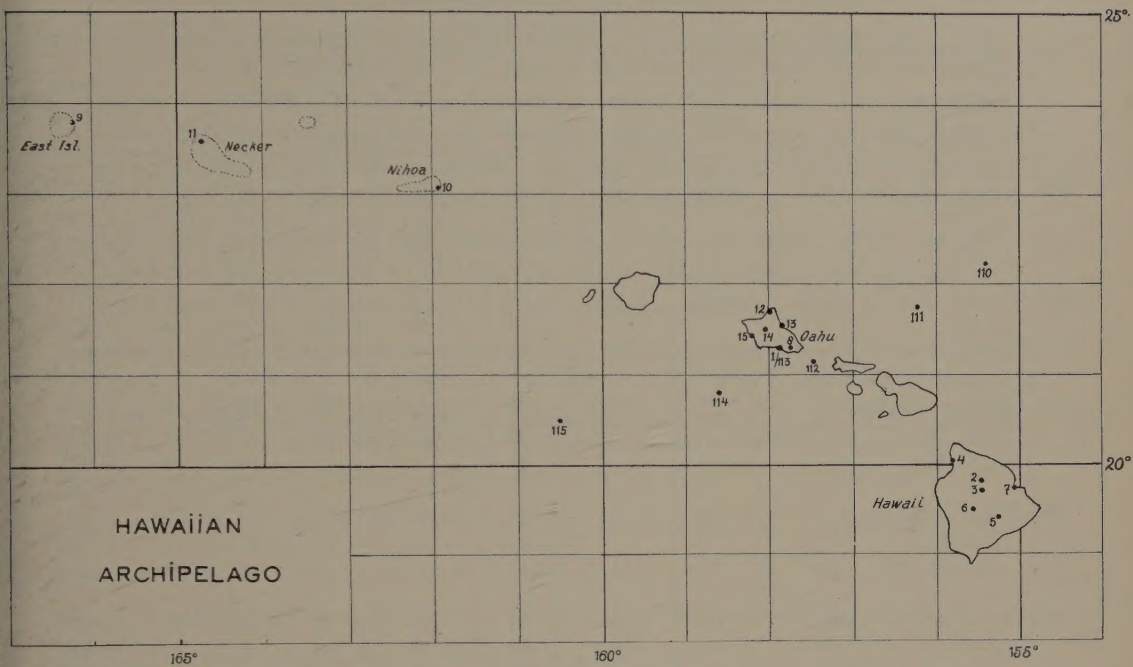


Fig. 1.

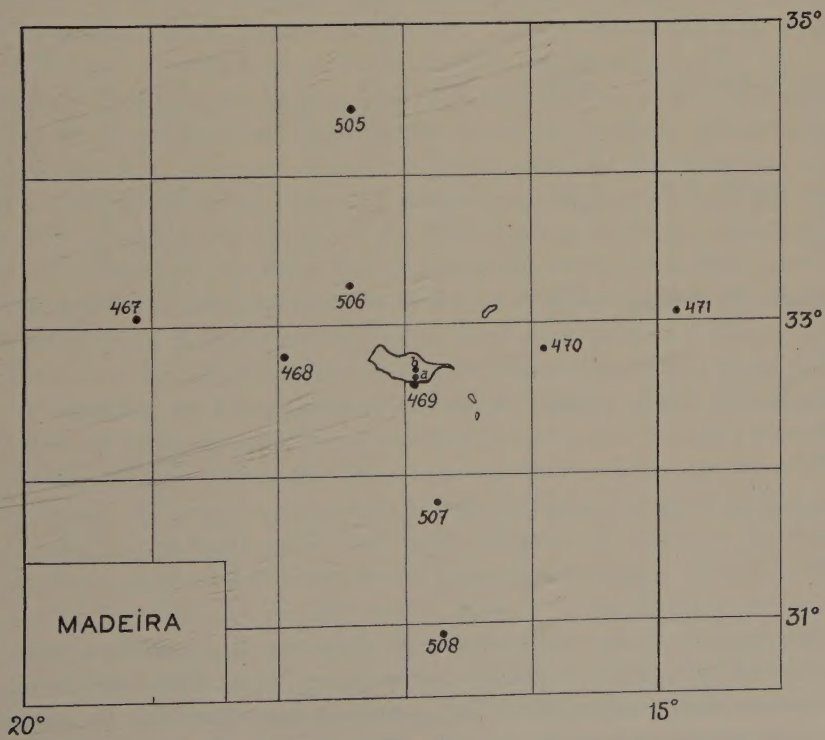


Fig. 2.

Gravity over the Madeira area
(anomalies in milligal)

Station Latitude N Longitude W	Elevation meter	free -air anom.	local isost. $T = 30$	regional isostatic anom. $T = 30$ kilometers				density topography
				$R = 58.1$	116.2	174.3	232.4	
467 Voyage Hr. Ms. O 13, 33°04' 19°06'	—4000	+ 47	+ 46 + 45 + 44	+ 44 + 43 + 41	+ 42 + 41 + 39	+ 40 + 38 + 37	+ 39 + 37 + 35	2.67 2.937 3.07
468 Voyage Hr. Ms. O 13, 32 48 17 56	—3250	+ 80	+ 78 + 77 + 76	+ 77 + 76 + 74	+ 68 + 66 + 64	+ 58 + 54 + 53	+ 49 + 44 + 41	2.67 2.937 3.07
469 Harbour Funchal, 32 37.79 16 54.96		+230	+106 + 90 + 81	+ 84 + 65 + 56	+ 50 + 28 + 16	+ 26 0 — 13	+ 12 — 19 — 34	2.67 2.937 3.07
469a Monte, Madeira, 32 39.8 16 54.25	+ 510	+334	+177 +157 +147	+152 +129 +118	+116 + 90 + 77	+ 93 + 63 + 48	+ 77 + 42 + 25	2.67 2.937 3.07
469b Pico d'Arriero, Mad., 32 43.1 16 54.8	+1530	+376	+114 + 84 + 68	+ 90 + 57 + 40	+ 55 + 18 0	+ 32 — 8 — 28	+ 16 — 29 — 52	2.67 2.937 3.07
470 Voyage Hr. Ms. O 13, 32 50 15 54	—4070	— 5	+ 22 + 26 + 27	+ 28 + 33 + 33	+ 29 + 34 + 34	+ 23 + 26 + 26	+ 16 + 19 + 18	2.67 2.937 3.07
471 Voyage Hr. Ms. O 13, 33 04 14 51	—4220	0	+ 16 + 18 + 18	+ 19 + 21 + 21	+ 23 + 26 + 25	+ 28 + 31 + 31	+ 32 + 34 + 34	2.67 2.937 3.07
505 Voyage Hr. Ms. K 18, 34 26 17 25	—4260	— 5	+ 11 + 12 + 12	+ 15 + 16 + 16	+ 13 + 14 + 14	+ 10 + 10 + 10	+ 8 + 7 — 1	2.67 2.937 3.07
506 Voyage Hr. Ms. K 18, 33 16 17 26	—3705	+ 13	+ 18 + 18 + 18	+ 21 + 21 + 21	+ 21 + 21 + 21	+ 16 + 15 + 14	+ 8 + 6 + 4	2.67 2.937 3.07
507 Voyage Hr. Ms. K 18, 31 49 16 45	—4370	— 13	— 1 — 1 — 1	+ 1 + 1 + 1	+ 5 + 5 + 5	+ 9 + 10 + 10	+ 12 + 12 + 12	2.67 2.937 3.07
508 Voyage Hr. Ms. K 18, 30 56 16 42	—4430	— 19	— 7 — 7 — 7	— 5 — 5 — 5	— 4 — 4 — 4	— 1 — 1 — 1	+ 3 + 3 + 2	2.67 2.937 3.07

values are left of the order of 20, 30 and even 50 mgal. This need not surprise us, it would be unlikely that a general system of reduction could make them disappear entirely. The remaining deviations may be caused by local irregularities of density and they may also be brought about by faulting

because this affects the way in which the equilibrium is readjusted. We know both to be present on the islands. As a further cause we might suppose the presence of partly empty magma-reservoirs. We shall not study these local anomalies and their meaning; a much more detailed knowledge of the geology and the morphology than the writer disposes of, would be required for taking this up with a chance of success. In general we shall adopt that reduction to be most satisfactory which gives the strongest reduction of the mean value of the anomalies. We get the following list of mean values for the three islands where we dispose of more than one gravity value, and for the adjacent deep seas:

Radius R density	0 km		58.1 km		116.2 km		174.3 km		232.4 km		Number of stations
	2.937	3.07	2.937	3.07	2.937	3.07	2.937	3.07	2.937	3.07	
Hawaii	+188	+174	+163	+148	+108	+ 91	+ 52	+ 32	+ 10	- 13	6
Oahu	+106	+ 98	+ 86	+ 77	+ 47	+ 36	+ 16	+ 3	- 4	- 17	6
Deep sea	- 12	- 12	- 6	- 6	+ 4	+ 4	+ 14	+ 15	+ 19	+ 20	4
Madeira	+110	+ 99	+ 84	+ 71	+ 45	+ 31	+ 18	+ 2	- 2	- 20	3
Deep sea	+ 24	+ 24	+ 26	+ 25	+ 25	+ 25	+ 23	+ 22	+ 20	+ 16	8

This table confirms the conclusion derived from the great table that the smallest anomalies are obtained in the two columns before the last, i.e. for $R = 174.3$ km, density 3.07 or for $R = 232.4$ km, density 2.937.

Before drawing further conclusions from this result, we have to consider whether there are no other suppositions about the isostatic compensation which reduce the anomalies in the same way. We find this to be the case; we get a similar effect by assuming the compensation to be local but very deep. The last anomaly column of the table for the Hawaiian Archipelago shows the anomalies obtained by adopting the HEISKANEN-AIRY method of reduction for a normal thickness of the crust of 80 km and we see that the anomalies are about as small as those obtained by means of the regional reduction according to the largest degree of regionality. There is no doubt that by applying the assumptions for a larger density of the topography, we should get values as satisfactory as those given by the regional reduction. The writer, however, thinks that there is no reason to attach any importance to this result. A local compensation at this depth of 80 km would imply a rigid crust of the Earth up to that depth, because otherwise the presence of mass-anomalies at that depth would mean a disturbance of equilibrium in a plastic layer which not only would disappear but which could never adjust the equilibrium of the surface irregularity which it is supposed to compensate. So we should have to assume rigidity up to that depth and this is contrary to all the present evidence. We should then, moreover, not be able to explain the presence of local compensation. In this regard we may

recall the general opinion already mentioned, that in the areas under discussion no great crustal folding has taken place and so we can eliminate the possibility that the crust has been down-folded there and has formed a deep-seated root of crustal matter.

So we may discard the supposition of very deep local compensation, which as far as the writer can see, is the only one which could give another explanation of the high anomalies on the islands, and we turn back to the assumption of regional distribution of the compensation over an extensive area limited by a radius of 170—240 km. A confirmation of this hypothesis may be found in the troughs to the NE and SW of the main islands of the Hawaiian group which might well be explained by the down-bending of the crust under the load of the islands in the way the hypothesis of regional isostatic compensation assumes; the dimensions of the trough are in agreement with the radius of distribution which we supposed here. Adopting this hypothesis as the only acceptable explanation of the positive anomalies on the islands, we may conclude that there is a rigid crust under these parts of the Pacific and the Atlantic of a thickness of 25—45 km.

We need not stress the importance of this result for our views on the migration of continents; in the present period such a movement would thus seem impossible. It remains of course an open question whether in former periods other conditions may have been present that were more favourable for it. It further appears remarkable that the thickness of the rigid crust seems to be the same for the Pacific near Hawaii and for the Atlantic near Madeira and that the figure is also of the same order as that obtained for the continents ¹⁾. This would point to the transition between rigid and plastic properties being more or less independent of the boundary between the sialic and the deeper layers or of other crustal layers; there can be no doubt that these boundaries are deeper below the continents than below the oceans and it is probable that in the Pacific they are still higher than in the Atlantic; many geophysicists assume even no granitic layer to be present there. This result is similar to the conclusions DALY arrived at by means of entirely different considerations ²⁾.

The writer wishes to acknowledge that the expenses for the computations on which the results mentioned in this paper are based, have been defrayed by the Netherlands Geodetic Commission and that the results obtained at sea have been rendered possible by the cooperation of the Netherlands Navy with this commission.

¹⁾ In an investigation of the gravity anomalies in the East Indies the writer found that a regional isostatic reduction corresponding to $R = 174.3$ km fits them best and so here also the rigid crust appears to have about the same thickness. See: F. A. VENING MEINESZ, "The Earth's crust deformations in the East Indies", Proc. Ned. Akad. v. Wet., Amsterdam, Vol. XLIII, 3, 1940.

²⁾ R. A. DALY, *Architecture of the Earth*, 1938, p. 189 e.s.

Hydrodynamics. — *Some considerations on the development of boundary layers in the case of flows having a rotational component.* By J. M. BURGERS. (Mededeeling N^o. 40 uit het Laboratorium voor Aero- en Hydrodynamica der Technische Hoogeschool te Delft.)

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

1. The object of the following note is to consider some problems which arise in the study of the boundary layers formed in various parts of rotating pumps or ventilators. In particular we wish to give attention to the influence of the centrifugal forces upon the flow in such boundary layers ¹⁾.

We will begin by deriving the equations for the flow in the boundary layer along a rotating wall in a general form. Special forms of these equations which can be obtained by introducing appropriate simplifications, then may be applied to the cases to be considered more in detail.

It is assumed throughout the following lines that the motion of the fluid is stationary with respect to a system of coordinates rotating with the angular velocity ω about an axis fixed in space. When a righthanded rectangular system x, y, z is used, the hydrodynamical equations can be put into the form:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + 2(\omega_y w - \omega_z v) - \omega^2 r \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x \quad (1a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + 2(\omega_z u - \omega_x w) - \omega^2 r \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_y \quad (1b)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + 2(\omega_x v - \omega_y u) - \omega^2 r \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_z \quad (1c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Here u, v, w are the components of the velocity of the fluid, measured with respect to the rotating system of coordinates; p is the pressure; f_x, f_y, f_z represent the frictional forces per unit of mass; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ are the components of the angular velocity ω along the coordinate axes; finally r is the distance from a point to the axis of rotation. As will be seen the

¹⁾ For a general treatment of the theory of boundary layer flow the reader is referred to the chapters on this subject in S. GOLDSTEIN, *Modern developments in fluid dynamics* I, II (Oxford 1938), where an extensive summary is given of the work of a great number of authors.

terms depending upon the angular velocity in these equations respectively represent the compound centripetal acceleration, according to CORIOLIS' theorem, and the ordinary centripetal acceleration.

In applying these equations to the flow in a boundary layer we shall take the y -axis normal to the wall. Within the boundary layer v at most will be of the same order of magnitude as the boundary layer thickness δ ; the same will apply to f_y . It follows that we may write equation (1b):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \simeq \omega^2 r \frac{\partial r}{\partial y} - 2(\omega_z u - \omega_x w) \dots \dots \dots (3)$$

which shows that within the boundary layer p can vary at most with an amount of the order δ . It is customary to neglect this variation, and to consider p as independent of y within the boundary layer. The value of p to be used in the remaining equations (1a) and (1c) then is determined by the flow outside of the boundary layer, which by hypothesis is not influenced by frictional forces.

We will assume that the motion outside of the boundary layer, when considered with respect to *non* rotating coordinates, is free from vorticity. The components U, V, W of this motion, defined with reference to the rotating system, consequently must satisfy the relations:

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = -2\omega_x, \text{ etc.} \dots \dots \dots (4)$$

It follows that the pressure p is determined by the equation:

$$p = \text{const.} - \frac{1}{2} \rho (U^2 + V^2 + W^2) + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \dots \dots \dots (5)$$

The equations for the motion in the interior of the boundary layer now can be written:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \omega^2 r \frac{\partial r}{\partial x} - 2\omega_y w + f_x \dots \dots (6a)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \omega^2 r \frac{\partial r}{\partial z} + 2\omega_y u + f_z \dots \dots (6b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \dots \dots \dots (7)$$

In these equations p should be considered as a known function of x and z .

2. In sections 2.—6. we shall be concerned with the flow in the boundary layer developing along a surface of revolution, and it will be assumed that the motion is wholly symmetrical with respect to the axis of rotation.

In applying equations (6) — (7) the origin of the coordinate system will be taken in a point of the surface along which the boundary layer develops (compare fig. 1); the x -axis shall be tangential to the intersection

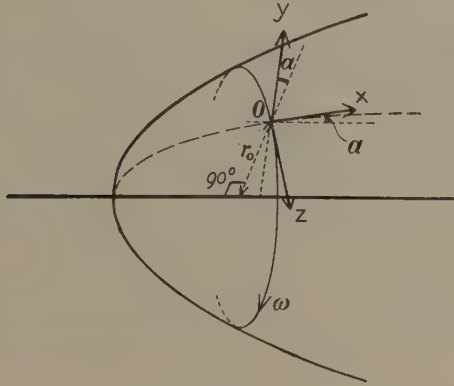


Fig. 1.

of the surface with a meridian plane; the z -axis shall be perpendicular to the meridian plane, in such a way that the system shall be righthanded. The angle between the x -axis and the axis of rotation will be denoted by α ; the positive direction of rotation is the one indicated in the diagram.

Denoting the distance from O to the axis of rotation by r_0 , we have: $r^2 = (r_0 + x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 + z^2$, from which, for $z = 0$:

$$\partial r / \partial x = \sin \alpha ; \partial r / \partial y = \cos \alpha ; \partial r / \partial z = 0.$$

Likewise for $z = 0$ we have:

$$\partial u / \partial z = -w \sin \alpha / r ; \partial v / \partial z = -w \cos \alpha / r ; \partial w / \partial z = +u \sin \alpha / r.$$

As, moreover:

$$\omega_x = +\omega \cos \alpha ; \omega_y = -\omega \sin \alpha ; \omega_z = 0,$$

the equations valid outside of the boundary layer:

$$\partial U / \partial z - \partial W / \partial x = -2\omega_y ; \partial V / \partial z - \partial W / \partial y = +2\omega_x,$$

lead to the relation:

$$\partial W / \partial r + W / r = -2\omega,$$

both for $x = \text{const.}$ and for $y = \text{const.}$ It follows that:

$$W = C/r - \omega r. \quad (8)$$

Here C is a constant, and C/r represents the tangential component of the

flow measured with respect to fixed axes (the absolute tangential component). Hence eq. (5) simplifies to:

$$p = \text{const.} - \frac{1}{2} \rho (U^2 + V^2 + C^2/r^2) \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

It is to be observed that we may put $V=0$ at the exterior limit of the boundary layer, so long as we remain sufficiently close to the origin of the coordinate system.

Equations (6a), (6b), (7) consequently take the forms:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \left\{ \frac{(w + \omega r)^2}{r} - \frac{C^2}{r^3} \right\} \sin \alpha + f_x \quad . \quad (10a)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = - \left(2\omega + \frac{w}{r} \right) u \sin \alpha + f_z \quad . \quad . \quad (10b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{r} \frac{\partial (ur)}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

3. We first consider the case where $\omega=0$ (no rotation) and $w=0$, $C=0$, so that there is no tangential velocity and the motion is confined to the meridian planes. Equations (10)—(11) then reduce to:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + f_x \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{r} \frac{\partial (ur)}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

We will assume that for a given form of the surface the boundary layer flow determined by these equations is wholly known, in particular also when the motion of the fluid in the boundary layer is turbulent. As is well known, in the immediate neighbourhood of the wall the left hand side of eq. (12), representing the effect of the inertia, vanishes, so that here the motion practically is determined by the "exterior driving force" $U(\partial U/\partial x)$ and the frictional force f_x . The frictional force is dependent upon the distribution of the velocity in the boundary layer, which distribution must satisfy the conditions that $u=0$ at $y=0$ and $u=U$ at $y=\delta$. In those cases where $\partial U/\partial x$ is negative, the "exterior" force tends to drive the fluid in the negative direction; when the boundary layer has become of sufficient thickness in order that the frictional force will have become rather small, a flow in the negative direction actually sets in close to the surface. The appearance of such a "counter flow" or back-flow brings about a separation from the surface of the original positive boundary layer flow, which separation soon becomes of such an amount that the concept of a boundary layer is no longer applicable²⁾.

²⁾ S. GOLDSTEIN, *l.c.* Vol. I, p. 56 and fig. 22.

It will be supposed that the course of this process is known for the boundary layer flow described by eqs. (12)—(13); our purpose will be to discuss the effects which must be expected to appear when the tangential velocity w and the rotation of the surface are superposed upon this flow.

4. We now re-introduce the tangential velocity w , keeping to the case of a non rotating surface, so that $\omega = 0$. The tangential velocity either can be produced by the action of the rotating blade system of the pump, or it may have been produced by a system of fixed guiding blades, placed ahead of the surface along which we will consider the boundary layer. In order that the flow outside of the boundary layer shall be irrotational, so that here $W = C/r$, the circulation around the blades which have produced the tangential velocity must be the same for all distances from the axis.

In this case (13) remains unchanged, whereas (12) is replaced by the two equations:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{w^2}{r} - \frac{C^2}{r^3} \right) \sin \alpha + f_x \quad . \quad . \quad (14a) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{uw}{r} \sin \alpha + f_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14b) \end{array} \right.$$

The case to be investigated can be compared to one in which $w = W = 0$, the surfaces limiting the field of flow remaining the same. So long as the boundary layer is sufficiently thin we may assume that the values of U and of $\partial U / \partial x$ are the same in both cases, which consequently differ only by the presence of the tangential velocity in one of them, and by the corresponding term in eq. (9) for the pressure. It will be seen that the term depending upon C in this equation adds to p an amount which increases with r .

The flow in the boundary layer now possesses a tangential component along with the component u . The distribution of the first one is governed by eq. (14b), which does not contain a term independent of w (as f_z is a function of w). Associated with eq. (14b) are the boundary conditions:

$$w = 0 \text{ at } y = 0; \quad w = W = C/r \text{ at } y = \delta.$$

As there is no tangential pressure gradient we may expect that eq. (14b), so long as u is everywhere positive (which will be the case so long as the boundary layer does not separate from the surface), will determine a monotonous course of the function $w(y)$; at the same time it will give information about the variation of δ along a meridian section of the surface.

It is more important to consider eq. (14a). Here the quantity $(w^2/r - C^2/r^3)$ will be negative in the boundary layer, in particular close to the surface, where w vanishes. Hence to the "exterior force" $U(\partial U / \partial x)$ already considered before in 3. there is added another "impressed force", the sign of which depends upon that of $\sin \alpha$. If r_0 increases when we move downstream along a meridian, $\sin \alpha$ will be positive, and this new force is

a retarding one. Hence when $U(\partial U/\partial x)$ should be negative, the already existing tendency for separation will be increased; when $\partial U/\partial x$ is positive the stability of the flow at any rate is impaired and with a sufficiently large value of C a possibility for the occurrence of separation even may arise in this case.

We must be careful, however, in making conclusions of this kind, as there are other effects which also influence the behaviour of the boundary layer. In the first place as the velocity outside of the boundary layer has increased from U to the value $\sqrt{U^2 + W^2}$, the motion in the boundary layer which perhaps might have been laminar with $W=0$, may have become turbulent. The transition to turbulence generally makes the boundary layer flow of a more stable nature and defers the tendency towards separation. This effect naturally loses its importance when the flow in the boundary layer should have been turbulent already from the beginning. — Another effect is connected with the *curvature* of the motion around the surface: in turbulent motion there is a tendency towards a decrease of turbulent intermixing and turbulent friction if it takes place along a convex wall; while the opposite tendency makes itself felt along a concave wall. Now a decrease of the turbulent frictional forces appears to increase the possibility for the occurrence of separation.

Hence there are several effects which must be taken into account, and it often may be difficult to determine their combined result. By way of example we may consider the case indicated in fig. 2, where it is assumed

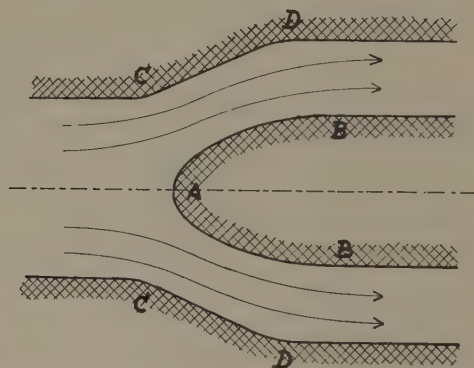


Fig. 2.

that U decreases when we pass from CC to DD , so that $U(\partial U/\partial x)$ is negative. When the motion in the boundary layers is turbulent already with $W=0$, it is probable that the introduction of a tangential component will increase the chance for the occurrence of separation along the interior surface AB , as here we have both the influence of the negative term $(w^2/r - C^2/r^3) \sin \alpha$ and the decrease of turbulent intermixing due to the flow along a convex surface. — At the exterior surface CD the tendencies discussed oppose each other. Experimental evidence points to a preponderant

influence of the increased turbulent intermixing and to a decrease of the chance for separation³⁾.

In the case sketched in fig. 3 we have $\sin \alpha < 0$ along the part EF of the

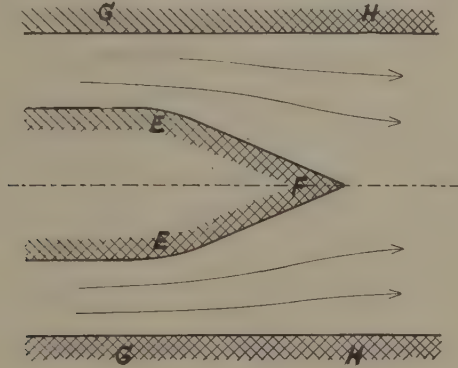


Fig. 3.

interior surface; hence the additional "impressed force" in eq. (14a) now drives forward the fluid, and somewhat should diminish the chance for the occurrence of separation which is caused by the negative value of $\partial U / \partial x$. The flow along the convex surface, however, brings a decrease of turbulent intermixing, and it is possible that this effect is preponderant and increases the tendency towards separation. It must be remarked, moreover, that although in practice there are sometimes found cases in which the diameter of the interior boundary surface decreases over a short distance, it is customary to remove as far as possible the rotational velocity of the fluid before it enters a space in which the interior surface retracts to zero radius (as at F in fig. 3), as the increase of the tangential velocity, which otherwise would be obtained near the axis, would bring about a loss of energy.

5. Next we turn to the case where the surface itself is rotating, with the angular velocity ω , while in the motion outside of the boundary layer there is no absolute tangential velocity, so that $C = 0$. Instead of eqs. (14a)—(14b) we obtain:

$$\left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{(w + \omega r)^2}{r} \sin \alpha + f_x \quad . \quad . \quad (15 a) \right.$$

$$\left\{ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{u}{r} (w + 2 \omega r) \sin \alpha + f_z \quad . \quad . \quad . \quad (15 b) \right.$$

³⁾ It is known that the efficiency of a diffuser (a pipe of increasing cross section, used for obtaining an increase of pressure through a decrease of the velocity) increases when a rotation is set up in the flow entering the diffuser. Compare e.g. H. PETERS, Energieumsetzung in Querschnittserweiterungen bei verschiedenen Zulaufsbedingungen, Ingenieur-Archiv 2, p. 92, 1931.

If we introduce the absolute tangential velocity:

$$w_1 = w + \omega r \quad (16)$$

eq. (15b) can be transformed into:

$$u \frac{\partial w_1}{\partial x} + v \frac{\partial w_1}{\partial y} = -\frac{uw_1}{r} \sin \alpha + f_z \quad (17)$$

As f_z just as well may be considered as a function of w_1 (within the boundary layer the derivative $\partial r / \partial y$ is negligible in comparison with $\partial w / \partial y$) this equation is identical in form with eq. (14b). The boundary conditions associated with it are:

$$w_1 = \omega r \text{ at } y = 0; \quad w_1 = 0 \text{ at } y = \delta.$$

We may expect that again there will be found a monotonous course of w_1 between these values.

Now considering eq. (15a) it will be seen that the additional "impressed force" $(w + \omega r)^2 / r \cdot \sin \alpha$ is of the opposite sign as the one appearing in eq. (14a). Hence if we return to a case as was sketched in fig. 2, where $\sin \alpha > 0$, there now is obtained a forward driving force, which consequently diminishes the chance for the occurrence of separation. It will be evident that this forward driving force is due to the centrifugal effect of the fluid in the rotating boundary layer; hence it will always drive this fluid towards the section of the largest diameter. The presence of such an effect can be useful in cases as that of fig. 2, where owing to the enlargement of the section of the channel $\partial U / \partial x$ has a negative value.

6. It may be of interest to make an estimate of the magnitude of the rotational velocity necessary to balance the retarding influence due to a negative value of $\partial U / \partial x$. For this purpose it is convenient to transform eq. (15a) by integrating it with respect to y over the thickness of the boundary layer. Passing over the details we obtain:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta dy \, r u^2 - U \frac{d}{dx} \int_0^\delta dy \, r u = \delta r U \frac{\partial U}{\partial x} + \sin \alpha \int_0^\delta w_1^2 dy - \frac{r F_x}{\varrho} \quad (18)$$

where F_x denotes the frictional force per unit area exerted on the wall. We assume the following approximations, which in most cases of turbulent flow in the boundary layer may be sufficiently accurate for deriving an estimate:

$$u \cong U(y/\delta)^{1/4}; \quad w_1 \cong \omega r - \omega r (y/\delta)^{1/4}.$$

Equation (18) then can be transformed into:

$$\frac{7}{72} U^2 \frac{d}{dx} (r \delta) = \frac{r F_x}{\varrho} - r \delta \left\{ \frac{23}{72} U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\sin \alpha}{36} \omega^2 r \right\} \quad (19)$$

Hence in order that the retarding effect of a negative $\partial U/\partial x$ may be balanced, the value of the circumferential velocity ωr should satisfy the inequality:

$$(\omega r)^2 \sin \alpha \geq -\frac{23}{2} r U \frac{\partial U}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

A similar calculation can be made for the more general case to which refers eq. (10a), where the absolute tangential velocity W outside of the boundary layer is not zero. In that case the second term on the right hand side of eq. (18) must be replaced by:

$$\sin \alpha \left\{ \int_0^{\delta} w_1^2 dy - \delta \frac{C^2}{r^2} \right\}.$$

For w_1 we must take the approximate formula:

$$w_1 \cong \omega r + (C/r - \omega r) (y/\delta)^{1/2},$$

and the second term of the right hand member of eq. (19) becomes

$$-r\delta \left\{ \frac{23}{72} U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\sin \alpha}{36 r} \left(\omega r - \frac{C}{r} \right) \left(\omega r + \frac{8C}{r} \right) \right\}.$$

When the absolute tangential velocity W is in the same direction as the angular velocity ω , it must be counted as positive (see fig. 1), so that also C is positive. If we write $C/r = k \cdot \omega r$, it is found that condition (20) is replaced by:

$$(1-k)(1+8k)(\omega r)^2 \sin \alpha \geq -\frac{23}{2} r U \frac{\partial U}{\partial x}.$$

The left hand member has a maximum for $k = 7/16 \cong 0,44$; with this value we find:

$$\frac{81}{32} (\omega r)^2 \sin \alpha \geq -\frac{23}{2} r U \frac{\partial U}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Experiments on the influence of rotation on the behaviour of the boundary layer along a sphere have been carried out by LUTHANDER and RYDBERG⁴⁾. As the authors state the effects of the centrifugal force of the rotating boundary layer, tending to drive the fluid towards the equator of the sphere, clearly come out in many details of their results, but the whole

⁴⁾ S. LUTHANDER und A. RYDBERG, Experimentelle Untersuchung über den Luftwiderstand bei einer um eine mit der Windrichtung parallele Achse rotierenden Kugel, Physik. Zeitschr. 36, p. 552, 1935.

phenomenon appears to be complicated very much by the influence of the rotational velocity upon the state of turbulence in the boundary layer. A comparison with eq. (20) cannot be made, as in the case of the flow along a sphere $\partial U/\partial x$ and $\sin \alpha$ both are positive at the front side, and negative at the back side.

7. We now leave aside the consideration of boundary layers along surfaces of revolution, and turn to those parts of hydrodynamic or aerodynamic machinery, where the field, owing to the presence of the blades, no longer possesses perfect rotational symmetry. In this case the simplified equations (10a), (10b), (11) cannot be used, and we must revert to eqs. (6a), (6b), (7). The conclusions that can be drawn with regard to the flow in the boundary layers reduce to a discussion of the influence of those terms in the right hand members of (6a) and (6b) which are due to the rotation.

By way of example we may consider a highly simplified type of axial pump, as indicated in fig. 4. It has been supposed that the four blades are

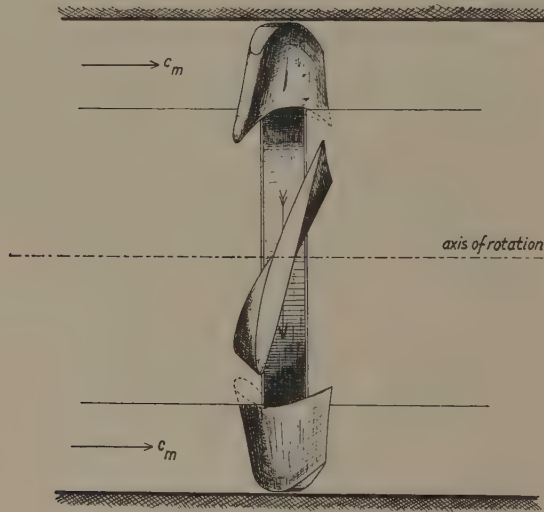


Fig. 4.

mounted on a disk (shaded in the diagram), which in the direction indicated by the arrow rotates between two fixed cylindrical surfaces. In the diagram the case has been imagined where the parts in the neighbourhood of the leading edges and of the trailing edges of the blades move over the non rotating surfaces.

We first consider the flow in the boundary layer along the cylindrical surfaces limiting the field. With reference to a rotating system of axes (introduced in order that the flow may appear stationary), the y -axis, as

before, being normal to the surface, the motion of the fluid is governed by the equations:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_z \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots (22)$$

In these equations the angular velocity does not appear. Hence in the boundary layer along the rotating part of the interior surface (i.e. along the cylindrical surface of the disc or hub which carries the blades), where the boundary condition for the relative tangential velocity is $w = 0$, no direct influence of the rotation is to be perceived.

At the non rotating cylindrical surfaces the boundary condition for w becomes: $w = -\omega r$. Consequently along these surfaces there exists a tangential flow (in the negative direction with reference to the rotating coordinate system). In so far as such a flow is found in the spaces between the blades it will strike upon the under sides of the blades (which in the diagram have been taken as practically flat). The blades, so to speak, "scrape off" the fluid from the outer cylindrical boundary, and from those parts of the inner boundary which they overlap. Considering with reference to the cylindrical surfaces we may expect that this arrangement has the effect of a forward driving force upon the fluid in the boundary layer. On the other hand, considering with reference to the blades, we see that a certain amount of fluid is heaped up before the under sides of the blades, while fluid is drawn away from the upper sides (the convex sides in the diagram). These effects may have a certain influence upon the boundary layer flow along the blades themselves ⁵⁾.

In the boundary layers along the blades the centrifugal force will tend to produce a motion in the radial direction. The effect of this centrifugal force, however, cannot be discussed without giving attention at the same time to the pressure distribution generated by the motion of the blades. An approximate picture can be obtained by means of the reasoning indicated in the next section.

⁵⁾ Experiments on the influence of "scraping off" the boundary layer have been carried out by H. P. J. VERBEEK, *Bepaling van den luchtweerstand van een bol met draaiende wielen*, *De Ingenieur* 48, p. W 157, 1933. The rotating vanes moving over the back side of the sphere used in these experiments were straight, so that they did not exert a forward driving force upon the fluid in the boundary layer. It was found that at those REYNOLDS numbers, where the flow in the boundary layer still is laminar and separation normally occurs before the equator, a decrease of resistance, pointing to a delay of the separation, could be obtained by scraping off the boundary layer. A satisfactory interpretation of all the results found in these experiments is difficult, however, and perhaps more exact investigations will be necessary.

8. The blades of the pump can be considered as vortex sheets; in the case of blades bearing a constant circulation the vortex lines from the interior cylindrical surface run to the exterior one, often in a nearly radial direction, so that they are all cut by any cylindrical surface imagined between the interior and the exterior boundary of the field. We shall write γ for the strength of the vortex sheet per unit length, measured along the intersection of the blade with such a cylindrical surface; the integral of γ along the whole length of the line of intersection is equal to the circulation Γ around the blade. Usually γ has a maximum somewhere in the neighbourhood of the leading edge of the blade; in certain cases the maximum may be found actually on the leading edge, but with suitable forms of the blade it can be displaced more towards the centre for the normal working condition of the pump.

Now let W_{rel} be the effective relative velocity of the fluid in the neighbourhood of the blade, which quantity is given by:

$$W_{\text{rel}} = \sqrt{c_m^2 + (\omega r - \frac{1}{2} \Delta c_u)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Here it has been assumed that upstream of the blades the absolute tangential velocity is zero, so that $C=0$, there being only an axial velocity of constant magnitude c_m ; $\frac{1}{2} \Delta c_u$ represents a correction due to the presence of the other blades, which with sufficient approximation is given by: $N\Gamma/4\pi r$ (N being the number of blades). It may be remarked that in a pump of the simple type sketched in fig. 4, the flow outside of the boundary layer practically is confined to cylindrical surfaces, so that any radial component may be neglected.

The pressure difference between the two sides of the blades is given by:

$$p_1 - p_2 = \rho W_{\text{rel}} \gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

and when the blades are not too thick the excess of pressure at a point of the under side will have the value:

$$p_1 = \frac{1}{2} \rho W_{\text{rel}} \gamma - \frac{1}{8} \rho \gamma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25a)$$

and the defect of pressure at a point of the upper side:

$$p_2 = -\frac{1}{2} \rho W_{\text{rel}} \gamma - \frac{1}{8} \rho \gamma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25b)$$

Combining these amounts with the potential of the centrifugal forces we have, at the under side:

$$p_1 - \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} \rho W_{\text{rel}} \gamma - \frac{1}{8} \rho \gamma^2 - \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \quad . \quad . \quad . \quad (26a)$$

and at the upper side:

$$p_2 - \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 = -\frac{1}{2} \rho W_{\text{rel}} \gamma - \frac{1}{8} \rho \gamma^2 - \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \quad . \quad . \quad (26b)$$

For a pump with simple blades in the normal working condition the value of γ , although being a function of the distance from the leading edge, does not change very much with r . Hence, as W_{rel} , according to (23), increases with r , it will be seen that at the upper side of the blade the fluid in the boundary layer is acted upon by a centrifugal field of force, and that the same effect may be found at the under side provided the value of γ is not too high. In the neighbourhood of the leading edge, however, locally rather high values of γ may occur (unless the blades are specially designed so as to avoid such values, which can be done for a particular working condition only); in that case the pressure excess can amount to $\frac{1}{2} \rho W_{\text{rel}}^2$. Nevertheless the quantity $p_1 - \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2$ will not increase with increasing values of r , provided the situation is not of such kind, that the high value of γ is to be found only at the outer part of the blade.

We may conclude that in general there will be a tendency towards a centrifugal flow of the fluid in the boundary layers along the blades, a marked one at the upper sides and a less significant one at the under sides.

9. Thus far we have given attention to motion in the radial direction only. When the distribution of the pressure over the blade surface should be known in detail, it will be possible to find out whether there may be marked tendencies for the appearance of a boundary layer flow in a direction opposite to that of the flow outside of the boundary layer. Such a tendency may be found at the upper side, from the trailing edge towards the region of minimum pressure; and in certain cases at the under side from the region of maximum pressure towards the leading edge. As is well known separation of the boundary layer flow may occur at the upper side when the pressure distribution is of an unsuitable type, as will occur when the angle of incidence of the effective relative velocity of the fluid upon the blade is too high. (In designing the blades care is taken that such a situation will not occur in the normal working range of the pump.)

It is further known that with a well rounded off leading edge there is no danger for separation at the under side of the blade when the region of high pressure is near to the leading edge. In those cases where the blade is designed so as to have the region of maximum pressure more towards the centre, the maximum pressure will not be so high as to cause serious danger for the occurrence of separation.

It must be noted finally that the compound centrifugal acceleration of CORIOLIS will produce a curvature of the streamlines in the boundary layer. In the case pictured in fig. 4 the flow along the under side of the blades *e.g.* continually will suffer a deviation to the right.

Chemistry. — On the Preparation of β -Phenyl-isopropylamine (*Benzedrine*), of the isomeric α -Phenyl-propylamine and of β -Phenyl- α -propylenediamine and on the Resolution of these Bases into their Optically-active Antipodes I. By F. M. JAEGER and J. A. VAN DIJK.

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

§ 1. For the purpose of executing some investigations, the results of which will later be communicated, we had to prepare greater quantities of the bases β -phenyl-isopropylamine: $C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CH(NH_2) \cdot CH_3$ (*benzedrine*) and its isomeride: α -phenyl-propylamine: $C_6H_5 \cdot CH(NH_2) \cdot CH_2 \cdot CH_3$, both in the racemic and in the optically-active forms; as well as of the hitherto unknown diamine: β -phenyl- α -propylenediamine: $C_6H_5 \cdot CH(NH_2) \cdot CH(NH_2) \cdot CH_3$, which by the presence of two asymmetrical carbon-atoms within its molecule should exist in two racemic and four optically-active forms. The two monoamines mentioned which are closely related to the physiologically active *ephedrine*-bases, have already formerly been prepared¹⁾, although the second in only a rather incompletely pure state. In the present paper we wish, as a preliminary introduction to the later experiments, to publish the results of the preparative methods followed and of the resolution of the *benzedrine* thus obtained into its optically-active components.

Benzedrine was prepared by us, starting from *methylbenzylcetone* (boilingpoint: 76° C. under a pressure of 3 m.M.), this being transformed into *methylbenzylcetoxime* (meltingpoint: $68^\circ.5$ C.) and the latter being subsequently reduced in absolute alcoholic solution by means of a 8- or 10-fold excess of sodium, in the way previously described²⁾.

The pure *methylbenzylcetone* is a colourless liquid which, contradictory to the data given in the literature ($+27^\circ$ C.), proved to crystallize at -16° C. with a very small velocity of crystallization and only after inoculation with a nucleus of the solidified substance. We never were able to find a higher temperature of crystallization than this, although the accompanying heat-effect appeared to be rather considerable.

The corresponding *cetoxime*: $C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot (C:NOH) \cdot CH_3$ was prepared by treatment of the *cetone* with a 10 % excess of free hydroxylamine in methyl-alcoholic solution at room-temperature. It shows an

¹⁾ W. LEITHE, Ber. d. d. chem. Ges., **65**, 660 (1932) F. P. NABERHAUER, Eng. Pat., ref. Chem. Zentral Blatt (1937), I, 662; P. BILLON, Compt. rend. Paris, **182**, 472 (1926).

²⁾ F. M. JAEGER and J. A. VAN DIJK, Proceed. R. Neth. Acad. of Sciences Amst., **39**, 384, 392 (1936).

enormous tendency to crystallization, although the rate of the latter is also only small; the *cetoxime* can easily be obtained from a solution in ethyl-acetate + absolute alcohol in very big prismatic crystals, which often show a thickness of several centimeters (Conf. § 2).

On reduction of the *cetoxime* by means of an excess of sodium in a boiling absolute alcoholic solution in the way previously²⁾ described, the yield of the amine obtained proved to be *considerably higher* than that mentioned in the literature, — the base there having been obtained by means of *electrolytical* reduction: we here often obtained 90—95 % of the theoretically calculated quantity³⁾.

The free and thoroughly dried base then was distilled in vacuo: the boilingpoint was 63°—64° C. under 7 m.M. pressure; under 1 atmosphere it is 205° C. The racemic *benzedrine* is a very volatile, strongly refracting liquid, with a very bitter and intensively burning taste and a specific weight of 0,9370 at 18° C., — somewhat higher than that of the optically-active components. Its refractive index is 1,550 for sodium-light, — this also being slightly higher than that of the antipodes. In a bath of solid carbonic acid and ethylalcohol the base gets glassy and then extremely slowly starts crystallizing: its meltingpoint is certainly appreciably lower than that of the antipodes. Most probably the racemic liquid base is really a mixture of the two components and *no* true racemic compound.

§ 2. As to the crystallographical characteristics of the *benzylmethylcetoxime* mentioned above, the following data were collected.

Benzylmethylcetoxime: $C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot C(:NOH) \cdot CH_3$, meltingpoint: 68°—68°.5 C. crystallizes from a solution in ligroine in big, transparent, hexagonally-bounded, tabular crystals or in thin, parallelogram-shaped tables which on {001} show a subdivision in sectors and a fine striation, parallel to the boundaries of the latter. (Fig. 1).

From ethylacetate enormous crystals can be obtained, often several c.M.

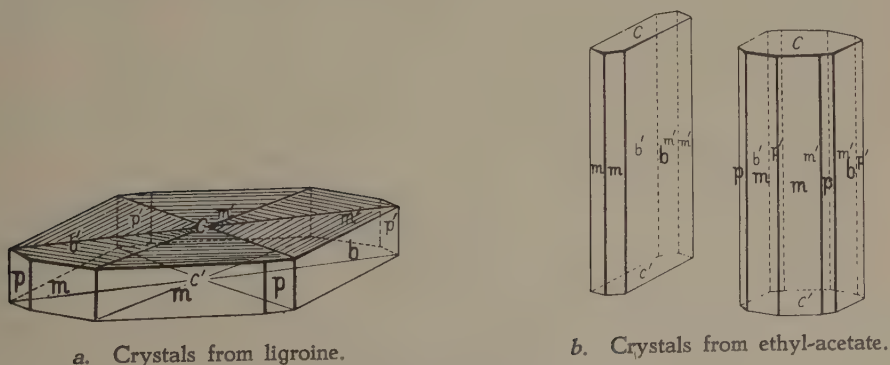


Fig. 1. Benzylmethylcetoxime. (68°,5 C.).

³⁾ NABERHAUER, for instance, indicates a yield of about only 60 % of the theoretical one.

thick, in the form of prisms, but *without* other terminal faces than {001}. They are very plastic and, therefore, as a consequence of mechanical deformation they manifest considerable oscillations of their angular values; their deformation takes place along certain glidingplanes of the vertical zone. Because of this fact the crystal-measurements are only approximative.

The forms observed are: $m = \{110\}$ broad and lustrous; $p = \{120\}$, narrow, but yielding good reflexions; $b = \{010\}$, sharply reflecting, well developed, although mostly narrower than m ; $c = \{001\}$, very lustrous. The faces of c and of p are often finely striated parallel to the c -axis.

Although pseudo-rhombic, the crystals truly are *monoclinic-prismatic* with: $a : b = 0,55 : 1$ and $\beta = 89^\circ 32'$. From the X-ray-examinations, the true parameters appear to be:

$$a : b : c = 0,522 : 1 : 0,3287;$$

$$\text{with } \beta = 89^\circ 32'.$$

The angular values are: $m : m = (110) : (\bar{1}\bar{1}0) = 55^\circ 8'$

$$m : p = (110) : (120) = 18 \ 40$$

$$p : b = (010) : (120) = 43 \ 46$$

$$p : c = (120) : (001) = 89 \ 40\frac{1}{2}$$

$$m : c = (110) : (001) = 89 \ 36$$

A good cleavability occurs parallel to {010}.

The plane of the optical axes is {010}; the exit of one of the axes is visible on {001}. On {010} the extinction is oblique, with an inclination of 51° with respect to the a -axis. The density was found $= 1,23$ at 20°C. ; from the X-ray-data, $d_0 = 1,255$, with $Z = \text{four}$ molecules in the elementary cell.

From rotation-spectrograms (with Fe -radiation: $\lambda_\alpha = 1,934 \text{ \AA}$), the dimensions of the elementary cell proved to be: $a_0 = 8,65^5 \text{ \AA}$; $b_0 = 16,58 \text{ \AA}$; $c_0 = 5,458 \text{ \AA}$. A series of SAUTER-spectrograms round the three principal axes gave, for instance, the following reflexions (the triplets in italics correspond to the most intensive images):

$$\begin{array}{l} 1. \text{ Round the } a\text{-axis:} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (020) \quad \text{---} \quad (040) \quad \text{---} \\ \quad \quad \quad (001) \ (011) \quad \text{---} \quad (031) \ (041) \ (051) \\ \quad \quad \quad (002) \ (012) \quad \text{---} \quad (032) \ (042) \quad \text{---} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2. \text{ Round the } c\text{-axis:} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (020) \quad \text{---} \quad (040) \quad \text{---} \quad \text{---} \\ \quad \quad \quad \text{---} \quad (110) \ (120) \ (130) \ (140) \ (150) \quad \text{---} \\ \quad \quad \quad (200) \ (210) \ (220) \ (230) \ (240) \ (250) \ (260) \end{array}$$

Several of these indices-triplets are also found in the powder-spectrograms: thus (120), (011), (200), (040), (210), (031), (220), (140), (041), (150), (240), (051), (012) and (250).

As the density of the crystals was determined at $1,21$ (20°C.), the elementary cell contains the mass of 4 molecules; the density then calculated is: $d_0 = 1,255$.

TABLE 1. Powder-Spectrogram of Benzylmethylcitotoxime (68°-5 C).

No of Line	Distance 2 <i>l</i> in mM:	Intens:	θ :	$\sin^2 \theta$: (observed)	$\sin^2 \theta$: (calculated)	Indices:
1	36.80	7	9° 13'	0.0257	0.0261	(120)
2	38.42 (β)	2	9 38	0.0280	0.0290	(011) (β)
3	42.70	9	10 42	0.0345	0.0348	(011) (α)
4	49.30	6	12 38	0.0478	0.0476	($\bar{1}$ 11)
5	51.58 (β)	4	12 55	0.0500	0.0500	(200)
6	54.16	8	13 34	0.0550	$\left\{ \begin{array}{l} 0.0544 \\ 0.0534 \end{array} \right.$	(040) . (210)
7	57.38	8	14 22	0.0616	$\left\{ \begin{array}{l} 0.0620 \\ 0.0636 \end{array} \right.$	(031) . (220)
8	59.70	5	14 57	0.0665	0.0669	(140) or (131) (β)
9	62.70	10	15 42	0.0732	0.0741	(131) (α)
10	64.44 (β)	3	16 8	0.0772	0.0780	(041) (β)
11	68.04	3	17 2	0.0858	0.0858	($\bar{2}$ 11) . (041) (α)
12	69.86	6	17 30	0.0904	0.0941	(221)
13	72.58	4	18 11	0.0974	$\left\{ \begin{array}{l} 0.0958 \\ 0.0975 \end{array} \right.$	($\bar{2}$ 21) . (150)
14	76.32	6	19 7	0.1072	0.1044	(240)
15	79.00	1	19 47	0.1146	$\left\{ \begin{array}{l} 0.1157 \\ 0.1163 \end{array} \right.$	(310) . (051)
16	83.82	1	20 59	0.1282	0.1289	(012)
17	85.56	1	21 25	0.1333	$\left\{ \begin{array}{l} 0.1333 \\ 0.1362 \end{array} \right.$	(250) . (102) . (241)
18	87.50	4	21 55	0.1393	0.1392	(022)
19	90.76	1	22 43	0.1491	0.1509	(122)
20	95.40	2	23 53	0.1639	$\left\{ \begin{array}{l} 0.1679 \\ 0.1666 \end{array} \right.$	(132) . (070)
21	97.62	2	24 27	0.1713	$\left\{ \begin{array}{l} 0.1723 \\ 0.1740 \end{array} \right.$	(260) . (202)
22	100.50	1	25 10	0.1808	0.1812	($\bar{2}$ 12)
23	103.30	1	25 52	0.1903	$\left\{ \begin{array}{l} 0.1917 \\ 0.1904 \end{array} \right.$	(142) . (222)
24	106.18	2	26 35	0.2003	$\left\{ \begin{array}{l} 0.1997 \\ 0.2031 \end{array} \right.$	(400) . (410)
25	108.86	2	27 16	0.2099	0.2076	($\bar{2}$ 32)
26	111.80	2	27 59	0.2202	0.2176	(080)
27	113.66	1	28 32	0.2282	0.2284	(242)
28	118.50	5	29 40	0.2450	0.2432	(421)
29	121.96	2	30 32	0.2581	0.2602	(431)
30	125.30	2	31 23	0.2712	0.2707	($\bar{3}$ 32)
31	128.00	1	32 4	0.2819	0.2825	(003)
32	130.90	2	32 47	0.2932	0.2945	(342)
33	133.22	1	33 22	0.3025	0.2994	(262)
34	135.42	2	33 55	0.3113	$\left\{ \begin{array}{l} 0.3131 \\ 0.3154 \end{array} \right.$	(033) . (510)
35	143.04	1	35 49	0.3425	0.3412	($\bar{4}$ 22)
36	146.10	2	36 35	0.3552	0.3535	(432)
37	152.60	1	38 13	0.3827	$\left\{ \begin{array}{l} 0.3846 \\ 0.3828 \end{array} \right.$	(243) . (303)
38	159.00	1	39 49	0.4100	0.4050	(063)
39	160.34	1	40 10	0.4160	0.4173	(480)
40	167.30	1	41 54	0.4460	0.4468	(343)
41	221.46	1	55 27	0.6783	0.6733	($\bar{3}$ 44)

$R = 57.2$ mM.; Fe- α - and - β -radiation ($\lambda_{\alpha} = 1,934 \text{ \AA}$). Exposition: 80 m. Amp. hours.

$a_0 = 8,655 \text{ \AA}$; $b_0 = 16,58 \text{ \AA}$; $c_0 = 5,458 \text{ \AA}$; $\beta = 89^{\circ}32'$ (pseudo-rhombic).

Quadratic Formula; $\sin^2 \theta_{\alpha} = 0,01248 \cdot h^2 + 0,0034 \cdot k^2 + 0,03139 \cdot l^2 -$

$- 0,0003685 \cdot hl$.

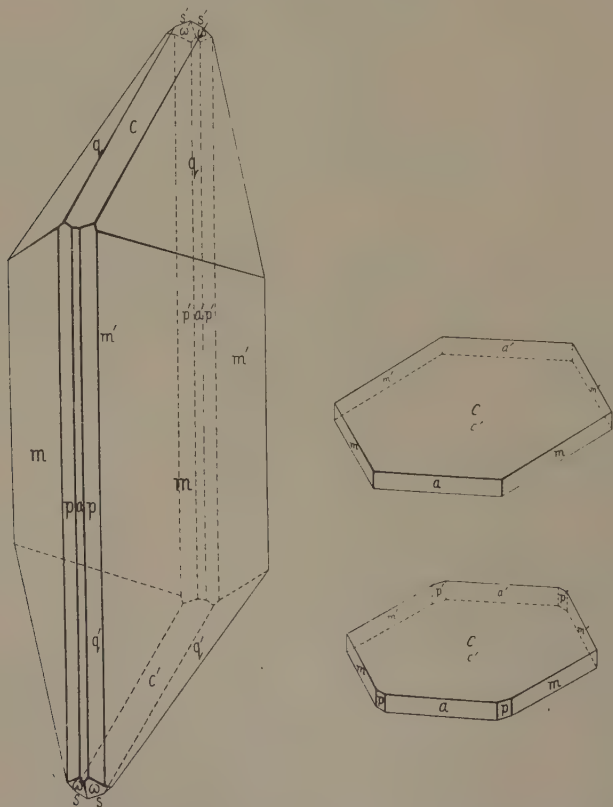
§ 3. For the preparation of racemic α -phenyl-1-aminopropane we started from *propiophenone* (*ethyl-phenyl-cetone*; *propionylbenzene*; α -oxo- α -phenylpropane (boilingpoint: 218° — 219° C.; meltingpoint: 21° C.). With free hydroxylamine in methylalcoholic solution this yields *ethyl-phenyl-cetoxime* (*propiophenone-oxime*): $\text{CH}_3 \cdot \text{CH}_2 \cdot \text{C} (: \text{NOH}) \cdot \text{C}_6\text{H}_5$, which from its solution in ligroine can be obtained in beautiful tabular crystals of the meltingpoint: 54° C.

Its crystalform and structural properties are described in the following paragraph.

On reducing this compound by means of sodium + absolute alcohol in the way previously mentioned, the base finally was obtained in the form of a colourless liquid, which under a pressure of 3 m.M. boils at 62° — 63° C. and which shows properties very analogous to those of the preceding base.

§ 4. *Crystalform and X-ray-Examination of Ethyl-phenyl-cetoxime*; meltingpoint: 54° C.

This oxime readily crystallizes from a solution in ligroine in the shape of thick prismatic crystals (*A*), or from methyl- or ethylalcohol in hexagonally-bounded plates (*B*) (Fig. 2). The substance is very soluble, but it easily crystallizes in well developed individuals.



A. Crystals from ligroine. B. Crystals from methyl- or ethyl-alcohol.

Fig. 2. Crystalform of Propiophenone-oxime. (54° C.).

They are *monolinic-prismatic*, with the axial ratio:

$$a : b : c = 1,6981 : 1 : 1,2056;$$

$$\beta = 69^{\circ}20'.$$

Forms observed: $m = \{110\}$, broad and lustrous; $p = \{210\}$ equally lustrous, but narrower than m ; $a = \{100\}$, mostly rather narrow, sometimes equally broad as m , yielding bright reflexions; $c = \{001\}$, often narrower than q , but in the case of the tabular crystals predominant and giving sharp images; $q = \{011\}$, broad, well reflecting; $\omega = \{211\}$ and $s = \{112\}$, both only small and subordinate and yielding only dull images.

Angular values:	Observed:	Calculated:
$m : c = (110) : (001) =$	$79^{\circ}14'$	—
$m : m = (110) : (\bar{1}10) =$	$64^{\circ}20'$	—
$m : q = (110) : (011) =$	$59^{\circ}26'$	—
$m : q = (110) : (011) =$	$40^{\circ}41'$	$40^{\circ}42'$
$c : q = (001) : (011) =$	$48^{\circ}28'$	$48^{\circ}26\frac{1}{2}'$
$a : c = (100) : (001) =$	$69^{\circ}15'$	$69^{\circ}20'$
$m : p = (110) : (210) =$	$19^{\circ}20'$	$19^{\circ}21'$
$p : a = (210) : (100) =$	$38^{\circ}34'$	$38^{\circ}29'$
$p : \omega = (\bar{2}10) : (\bar{2}11) =$	$32^{\circ}30'$	$31^{\circ}58'$
$a : m = (100) : (110) =$	$57^{\circ}50'$	$57^{\circ}50'$
$c : s = (001) : (\bar{1}12) =$	$37^{\circ}25'$	$36^{\circ}47'$
$s : m = (\bar{1}12) : (\bar{1}10) =$	$63^{\circ}31'$	$64^{\circ}0'$

The plane of the optical axes, is according to Dr. TERPSTRA, perpendicular to $\{010\}$; the first bissectrix lies in $\{010\}$, the second is parallel to the b -axis, which is the optical normal.

The cleavability is parallel to $\{100\}$.

The density of the crystals at 15°C . was found to be: 1,192. The crystals are pseudo-rhombic: on turning them round the c -axis through 180° and attributing to the different forms the symbols: $c = \{102\}$, $a = \{\bar{1}00\}$, $q = \{\bar{1}12\}$, $s = \{011\}$ and $\omega = \{212\}$, the parameters become: $a' : b' : c' = 1,5883 : 1 : 1,2056$ with $\beta' = 89^{\circ}52\frac{1}{2}'$.

From rotation-spectrograms (Fe -radiations, $\lambda_a = 1,934\text{ \AA}$) round the a -, b - and c -axis, the dimensions of the elementary cell were found to be: $a_0 = 12,72\text{ \AA}$; $b_0 = 7,68\text{ \AA}$ and $c_0 = 9,03\text{ \AA}$; so that the cell contains a mass equal to 4 molecules.

A powder-spectrogram yielded the following data (Table II):

§ 5. For the preparation of β -phenyl- α -propylenediamine we equally started from *propiophenone*, which by means of methyl-alcohol and N_2O_3 was first transformed ⁴⁾ into α -isonitroso-*propiophenone* (*methyl-benzoyl-*

⁴⁾ Conf.: *Organic Syntheses*, XVI, 44.

TABLE II. Powder-Spectrogram of Propiophenone-oxime; meltingpoint: 54° C.

No of Line:	2 l in mM.	Intens: (estin)	Rad λ :	θ :	$\sin^2 \theta$: (observed)	$\sin^2 \theta$: (calculated)	Indices:
1	25.46	2	α	6° 22 $\frac{1}{2}$ '	0.0123	0.0131	(001); (101)
2	27.96	2	α	7 0	0.0148	0.0158	(010)
3	38.90	3	α	9 44 $\frac{1}{2}$	0.0286	0.0289	(011); (111)
4	42.68	4	β	10 41 $\frac{1}{2}$	0.0344	0.0378	($\bar{1}$ 11)
5	47.12	8	α	11 48	0.0418	0.0421	(111)
6	51.80	4	α	12 58 $\frac{1}{2}$	0.0504	0.0524	(002); (202)
7	54.16	1	β	13 34	0.0550	0.0535	(300)
8	56.54	2	α	14 9 $\frac{1}{2}$	0.0598	0.0594	(300)
9	59.46	3	β (α)	14 53 $\frac{1}{2}$	0.0660	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0.0682 \\ \beta = 0.0652 \end{array} \right.$	α (012); β (302)
10	62.34	6	α	15 37	0.0724	0.0724	(302)
11	64.60	1	α	16 11	0.0776	0.0765	(021); (121)
12	68.06	2	α	17 3	0.0859	0.0879	($\bar{1}$ 12)
13	70.08	5	α	17 33	0.0909	0.0922 to 0.0925	($\bar{3}$ 01); (401)
14	74.24	1	β	18 35 $\frac{1}{2}$	0.1017	0.1060	(003)
15	80.12	5	α	20 4	0.1177	0.1179	(003)
16	82.00	1	α	20 32	0.1230	0.1207 to 0.1228	(113); (320)
17	86.00	2	α	21 32 $\frac{1}{2}$	0.1348	0.1337; 0.1341 to 0.1358	(013); (313); (322)
18	88.80	1	α	22 14	0.1432	0.1427 to 0.1442	(030); ($\bar{1}$ 03)
19	93.70	4	α	23 28	0.1586	0.1600	($\bar{1}$ 13)
20	96.24	1	α	24 6	0.1667	0.1670	($\bar{3}$ 12)
21	100.20	2	β (α)	25 3	0.1792	0.1756 to 0.1760	(032); ($\bar{2}$ 31); (331); α ; (510)
22	104.82	4	α	26 15	0.1956	0.1951 to 0.1955	(032); ($\bar{2}$ 31); ($\bar{2}$ 32) (331)
23	107.42	1	α	26 54	0.2047	0.2058	(114)
24	109.84	2	α	27 31	0.2134	0.2146	(322)
25	111.80	2	β	28 0	0.2204	0.2228 to 0.2235	(432); (430); ($\bar{2}$ 32); (331); (233)
26	116.82	1	α	29 15 $\frac{1}{2}$	0.2389	0.2364 to 0.2376	($\bar{3}$ 03); (600)
27	119.40	3	α	29 54	0.2485	0.2476 to 0.2483	(432); (430); ($\bar{2}$ 32); (133); (233)
28	124.80	2	α	31 15	0.2691	0.2668	(041); (141)
29	127.50	1	α	31 55 $\frac{1}{2}$	0.2796	0.2799	($\bar{1}$ 41)
30	129.12	2	α	32 20	0.2861	0.2869; 0.2874	($\bar{1}$ 33); (433)
31	130.63	2	α	32 43	0.2921	0.2939	($\bar{3}$ 32)
32	134.00	1	α	33 33 $\frac{1}{2}$	0.3055	0.3061 to 0.3045	(042); ($\bar{1}$ 24); ($\bar{2}$ 14)
33	135.60	1	β	33 57 $\frac{1}{2}$	0.3120	0.3122	(304); (441)
34	140.40	2	α	35 9 $\frac{1}{2}$	0.3315	0.3329	(334)
35	144.10	4	α	36 5	0.3469	0.3478 to 0.3461	($\bar{3}$ 04); (441)
36	146.10	1	α	36 35	0.3552	0.3520 to 0.3586	($\bar{2}$ 24); (434); (242); (432); (243) or (034)
37	151.70	2	α	37 59 $\frac{1}{2}$	0.3620	0.3657	($\bar{4}$ 23)
38	153.50	1	α	38 26 $\frac{1}{2}$	0.3865	0.3829	($\bar{1}$ 15)
39	157.90	1	α	39 32 $\frac{1}{2}$	0.4053	0.4049	(342)
40	162.10	3	α	40 35 $\frac{1}{2}$	0.4234	0.4202	(404)

$R = 57.2$ mM. Radiation: $Fe \alpha(\beta)$; $\lambda_{\alpha} = 1,934 \text{ \AA}$. Exposition: 60 m.A.h.

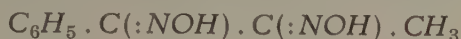
Monoclinic-prismatic: $a_0 = 12,72 \text{ \AA}$; $b_0 = 7,68 \text{ \AA}$; $c_0 = 9,03 \text{ \AA}$; $\beta = 69^\circ 20'$

Quadratic formula: $\sin^2 \theta_{\alpha} = 0,0066017 \cdot h^2 + 0,015854 \cdot k^2 + 0,01310 \cdot l^2 - 0,0065641 \cdot hl$.

The elementary cell contains the mass of 4 molecules; the density of the crystals = 1,192 at 0° C. (calculated).

cetoxime): $C_6H_5 \cdot CO \cdot C(:NOH) \cdot CH_3$, melting at $114^\circ C$. The crystallographical and structural properties of this compound are described in § 6.

By repeated treatment⁵⁾ of this substance with free hydroxylamine in methyl-alcoholic solution, the corresponding *methyl-phenyl-glyoxime* (*acetyl-benzoyldioxime*; α - β -dioximino- α -phenylpropane):



was obtained, which in the pure state proved to melt at 238° — $240^\circ C$. This sparingly soluble compound readily crystallizes from a number of solvents, but always in the form of spherolithically-aggregated, very small, opaque crystals. So great is its tendency towards aggregation, that we found it quite impossible to obtain the substance in free, isolated individuals.

For this reason, no crystallographical or roentgenographical analysis has been made.

As a reduction of this glyoxime in acid solution, — e.g. with tin and hydrochloric acid (KOLB; GABRIEL), — yields *2-5-dimethyl-3-6-diphenyl-pyrazine*, we tried the reduction by means of sodium + absolute alcohol in excess (see in the above); indeed, the yield of the base desired now proved to be almost the theoretical one.

The *1-Phenyl-1-2-diaminopropane* (β -phenyl- α -propylenediamine) thus obtained is a colourless, strongly refracting liquid, which under a pressure of 2 to 3 m.M. boils at $93^\circ C$. Even in the darkness, the base shows a tendency towards assuming a pale yellow colour.

Its specific weight at $18^\circ C$. proved to be: *1.0131*. The liquid has a bitter and burning taste, but less intensive than that of the two monovalent bases already described.

Even in a bath of solid CO_2 and alcohol the racemic base does *not* crystallize: it changes into a very viscous liquid, finally into a glassy mass, in which no trace of crystals appear.

The chloride and the nitrate are very soluble in water, the sulphate much less so. On adding strong hydrochloric or nitric acid to the yellowish base dissolved in water, the solution turns violet; this colour is, however, changed into a yellow one on boiling the aqueous solution for a short time.

Finally the sulphate was obtained from its aqueous solution in a perfectly colourless aggregation of small, thin plates.

§ 6. *Crystalform and X-ray-study of Isonitroso-propiophenone (methyl-benzoylcetoxime)*; meltingpoint: $114^\circ C$.

This substance crystallizes from acetone, ethyl-alcohol and, preferentially, from methylalcohol in lustrous, transparent tables Fig. 3 (A); from chloroform or chloroform + ligroïne in more or less elongated prisms (B) with often rather irregularly developed terminal forms.

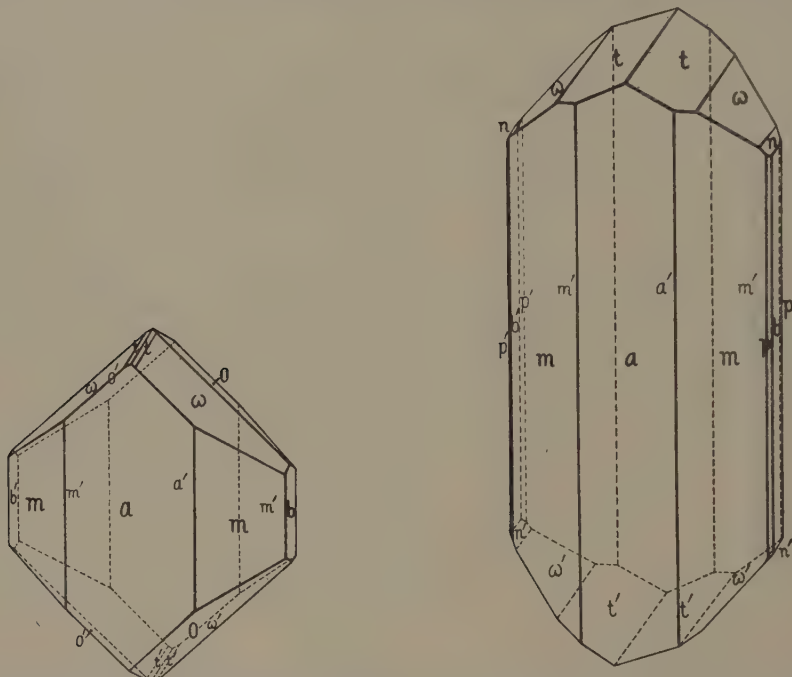
⁵⁾ The process (10% excess of hydroxylamine) must at least twice be repeated, because the reaction-velocity is rather small and the first time, therefore, the transformation often proves to be still incomplete, yielding a mixture of the mono- and dioximes.

The crystals are *monoclinic prismatic*, with the parameters:

$$a : b : c = 0,6894 : 1 : 0,4397;$$

$$\beta = 73^{\circ}6'.$$

Forms observed: $a = \{100\}$ predominant, often with a fine vertical striation; in the latter case the reflexions are dull, otherwise they are very lustrous; $m = \{110\}$ and $b = \{010\}$, well developed and yielding sharp



A. Crystals from methylalcohol or acetone. B. Crystals from chloroform or ligroine.
Fig. 3. Crystal form of Isonitroso-propiophenone (114°C.).

images; $o = \{121\}$ and $\omega = \{021\}$, about equally broad and giving bright reflexions; $t = \{011\}$, narrow, sometimes broader; $n = \{031\}$, small, sometimes absent, — but when present, well reflecting; $p = \{120\}$, much narrower than m , but yielding good images.

Furthermore: $l = \{210\}$ and $k = \{410\}$, both extremely narrow and scarcely visible; these forms yield dull reflexions or are often absent. With the prismatic crystals (B), the faces a and m often show a fine vertical striation, which is absent with the crystals (A) deposited from alcohol.

The crystals are perfectly cleavable parallel to $\{010\}$.

Angular Values:	Observed:	Calculated:
$a : m = (100) : (110) =$	$*33^{\circ}24\frac{2}{3}'$	—
$o : o = (\bar{1}21) : (\bar{1}\bar{2}1) =$	$*79\ 28$	—
$a : o = (\bar{1}00) : (\bar{1}21) =$	$*74\ 46\frac{1}{2}$	—
$b : m = (010) : (110) =$	$56\ 35\frac{1}{3}$	$56^{\circ}35\frac{1}{3}'$
$b : p = (010) : (120) =$	$37\ 10$	$37\ 10$

$p : m = (120) : (110) =$	19 29	19 25 $\frac{1}{3}$
$a : k = (100) : (410) = \text{ca.}$	9 40	9 22
$k : l = (410) : (210) = \text{ca.}$	8 50	8 53 $\frac{1}{3}$
$l : m = (210) : (110) = \text{ca.}$	15 10	15 9 $\frac{1}{2}$
$\omega : a = (021) : (100) =$	77 13	77 9
$\omega : \omega = (021) : (0\bar{2}1) =$	80 12	80 9
$b : \omega = (010) : (021) =$	49 54	49 55 $\frac{1}{2}$
$o : \omega = (\bar{1}21) : (021) =$	28 2	28 4 $\frac{1}{2}$
$b : o = (010) : (\bar{1}21) =$	50 17	50 18
$\omega : t = (021) : (011) =$	17 6	17 15 $\frac{1}{2}$
$t : t = (011) : (0\bar{1}1) =$	45 47	45 38
$b : n = (010) : (031) =$	38 25	38 23 $\frac{1}{2}$
$n : \omega = (031) : (021) =$	11 31	11 32

On $\{100\}$ a rectangular, on $\{110\}$ a slightly, on $\{010\}$ a clearly inclined extinction proves to be present.

The plane of the optical axes is, according to Dr. TERPSTRA, perpendicular to $\{010\}$; the b -axis is the first bissectrix; the dispersion is "crossed" and on $\{010\}$ the exit of the two axes is observable.

The specific weight was found to be 1,288 at 16° C.

From rotation-spectrograms (iron- α -radiation) round the c -axis ($\sin \mu = 0,247$), c_0 was found to be 6,23 Å; from a SAUTER-diagram, b_0 proved to be 14,3 Å ($d_{100} = 9,36$ Å).

From a rotation-spectrogram round the z -axis: $b-\omega-t-t$; the value of $\sin \mu$ was found to be 0,1591; so that $a_0 = 9,68$ Å. As $\beta = 73^\circ 6'$, it follows that the elementary cell contains a mass of 4 times the molecular weight; the calculated density at 0° C. in that case is: $d_0 = 1,304$.

The SAUTER-spectrogram round the c -axis yielded the most intensive spots for the following indices-triplets (arranged in sequence of decreasing intensities: (040), (110), (200), (210), (150), (230); (130), (240), (440), (250), (330), (350); (220), (510), (160), (170), (300); and several of smaller intensities, like: (060), (260), (410), (310), (320), (340), (370), (470), (550), (570), (620), (660), (740), etc. Several of these have also been met with in the powder-spectrogram recorded in Table III (on the following page).

§ 7. Resolution of Benzedrine into its Optical Antipodes.

Racemic benzedrine: $C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot CH(NH_2) \cdot CH_3$ was resolved into its optical antipodes by repeated fractional crystallization of the *bi-tartrates* from 92 % alcohol. The *bi-d-tartrate* was nine times recrystallized from the *boiling* solvent; after cooling to roomtemperature, the salt is deposited in the form of small colourless crystals melting, when pure, at 183° C. In general, the resolution evidently takes place in the way described by LEITHE ⁶⁾. The final solutions containing the salt of the levogyrotory

⁶⁾ W. LEITHE, Ber. d.d. chem. Ges., 65, 660 (1932).

TABLE III.
Powder-Spectrogram of Isonitroso-propiophenone; meltingpoint: 114° C.

No of Line:	2 l in mM.	Intens: (estim.)	Rad λ :	θ :	$\sin^2 \theta$: (observed)	$\sin^2 \theta$: (calculated)	Indices:
1	23.44	3	α	5°52 $\frac{1}{2}$ '	0.0105	0.0109	(100)
2	25.84	3	β	6 28	0.0127	0.0138	(110)
3	28.46	3	α	7 7 $\frac{3}{8}$	0.0154	0.0155	(110)
4	30.80	2	α	7 43	0.0180	0.0183	(020)
5	41.26	1	α	10 20	0.0322	0.0319	(111)
6	44.22	2	α (β)	11 42 $\frac{1}{8}$	0.0412	0.0411	(030); β (200)
7	49.00	8	α	12 16 $\frac{1}{8}$	0.0452	0.0436; 0.0456	(200); (121)
8	53.66	3	α	13 26	0.0540	0.0520; 0.0548	(130); (211)
9	55.22	2	β	13 49 $\frac{1}{2}$	0.0571	0.0558	(220)
10	57.40	4	α	14 22 $\frac{1}{2}$	0.0616	0.0619	(220)
11	61.00	8	α	15 16 $\frac{1}{2}$	0.0694	0.0685; 0.0676	(131); (221) or (031)
12	63.36	8	α	15 52	0.0747	0.0732	(040)
13	67.50	3	α	16 54 $\frac{1}{2}$	0.0846	0.0847; 0.0841	(230); (140)
14	69.20	3	α	17 19 $\frac{1}{2}$	0.0887	0.0882	($\bar{1}$ 31)
15	74.02	6	α	18 32	0.1010	0.1010; 0.1005	(112); (141)
16	77.84	2	α	19 29	0.1112	0.1132	(321)
17	81.34	4	α	20 22	0.1211	0.1202	($\bar{1}$ 41)
18	83.02	2	α	20 47 $\frac{1}{2}$	0.1260	0.1252; 0.1278	(150); (222)
19	86.04	2	α	21 32 $\frac{1}{2}$	0.1348	0.1392; 0.1358	(330); ($\bar{1}$ 02)
20	93.40	1	α	23 23 $\frac{1}{2}$	0.1576	0.1579; 0.1585	(250); ($\bar{3}$ 11)
21	95.80	1	α	23 59 $\frac{1}{2}$	0.1653	0.1646; 0.1659	(060); (411)
22	113.72	1	α	28 28 $\frac{1}{2}$	0.2273	0.2271; 0.2294	($\bar{3}$ 41); ($\bar{2}$ 32) or ($\bar{3}$ 41)
23	121.54	2	α	30 26	0.2566	0.2584; 0.2551	($\bar{4}$ 21); (023)
24	126.24	1	α	31 37	0.2748	0.2725; 0.2773	(500); ($\bar{1}$ 03)

Radius of The Camera: 57,2 mM. Fe- α and - β -radiation: $\lambda_{\alpha} = 1,934 \text{ \AA}$. Exposure: 100 m.A.h. Quadratic formula: $\sin^2 \theta_{\alpha} = 0,0109 \cdot h^2 + 0,004573 \cdot k^2 + 0,02632 \cdot l^2 - 0,009847 \cdot h.l$. Monoclinic-prismatic; $a_0 = 9,68 \text{ \AA}$; $b_0 = 14,3 \text{ \AA}$; $c_0 = 6,23 \text{ \AA}$; $\beta = 73^{\circ}6'$. $Z = 4$ mol. in the elementary cell.

base, then were treated with KOH and the free base thus obtained transformed into the *bi-l-tartrate* by means of *l-tartaric acid*: after four recrystallizations this bitartrate did not change its specific rotation anymore.

The *bitartrates* are anhydrous; they crystallize in small, lustrous prisms or in flat plates of rectangular shape. They belong to the *monoclinic-sphenoidal* class, with the axial ratio:

$a : b : c = 1,7604 : 1 : 1,1841$; $\beta = 87^{\circ}52'$ and they are evidently of a pseudo-rhombic type. (Fig. 4). The crystals of *d-benzedrine-bi-d-tartrate* are enantiomorphous to those of *l-benzedrine-bi-l-tartrate*. They show the

forms: $a = \{100\}$, very lustrous; $m = \{110\}$, and $p = \{1\bar{1}0\}$, well developed, moderately well reflecting, but duller than a ; $c = \{001\}$, sometimes broader, sometimes narrower, always yielding good reflections, — just like $r = \{101\}$, which, however, is mostly narrower than c and yields reflections of a variable lustre; $\omega = \{111\}$ *bi-tartrate* with the *levogyrate*, ($o = \{111\}$ is, however, often absent with the *dextrogyrate bitartrate*) is always small, but well measurable; $s = \{201\}$, very narrow in the case of the *levogyrate*, but broader with the *dextrogyrate* crystals, yields feeble reflections, as Dr. TERPSTRA more particularly stated. The angular values of the different individuals oscillate within rather wide limits. Twins round the c -axis.

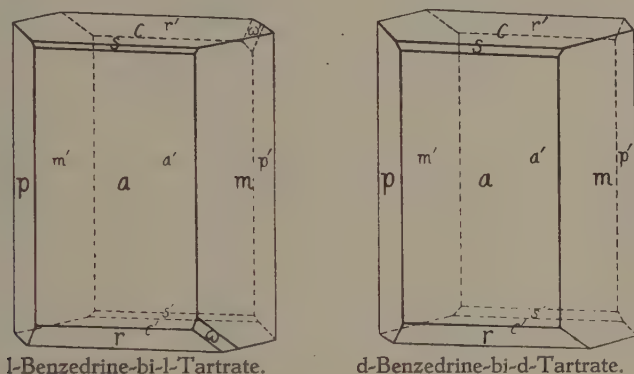


Fig. 4.

Angular values:	Observed:	Calculated:
$a : m = (100) : (110) =$	$^{\circ}60^{\circ}23'$	—
$c : r = (001) : (101) =$	$^{\circ}34\ 35$	—
$a : c = (100) : (001) =$	$^{\circ}87\ 52$	—
$a : p = (100) : (1\bar{1}0) =$	$60\ 20$	$60^{\circ}23'$
$c : \omega = (001) : (111) =$	$54\ 4$	$54\ 23$
$\omega : a = (\bar{1}11) : (\bar{1}00) =$	$68\ 5$	$67\ 43$
$\omega : p = (\bar{1}11) : (1\bar{1}0) =$	$37\ 0$	$36\ 41$
$a : s = (100) : (201) =$	$35\ 48$	$35\ 51\frac{1}{2}$
$c : s = (001) : (201) =$	$52\ 4$	$52\ 0\frac{1}{2}$

The crystals are perfectly cleavable parallel to $\{100\}$.

The axial plane is $\{010\}$; on $\{100\}$ generally the exit of one axis (and by twin-formation, occasionally that of two disturbed axes) is observable. Strong, *inclined* dispersion, with $\varrho < \nu$ round the first bissectrix of positive character, which is oblique to $\{100\}$. The axial image occasionally appears to be somewhat disturbed as a consequence of the twin-formation round the c -axis. The density of the crystals was 2,169 at 17°C .

From rotation-diagrams obtained by means of Fe -radiation round the a -, b -, c -axis (and round $[110]$, $I = 14,64\text{ \AA}$ by Dr. TERPSTRA), the dimensions of the elementary cell were found to be: $a_0 = 12,76\text{ \AA}$; $b_0 = 7,17\text{ \AA}$; $c_0 = 8,41\text{ \AA}$. The elementary cell, therefore, evidently contains

a mass of 4 molecules. The density was calculated at 2,186 at 0° C.; and $a_0 : b_0 : c_0 = 1,7796 : 1 : 1,1729$.

The rotatory dispersion of these salts was measured; the results are collected in Table IV.

Wave-length in A.U.:	Specific Rotations $[\alpha]$ of		Mean Values of the Dispersion:
	<i>d</i> -Benzedrine- bi- <i>d</i> -tartrate:	<i>l</i> -Benzedrine- bi- <i>l</i> -tartrate:	
6730	—	—25.6	25.4
6480	+26.5	—27.0	26.7
6262	+27.3	—28.5	27.9
6074	+29.5	—30.5	30.0
5893	+31.8	—32.0	31.9
5735	+33.4	—33.5	33.4
5592	+35.4	—36.4	35.9
5463	+37.5	—39.4	38.4
5340	+39.0	—40.9	39.9
5225	+41.8	—42.3	42.1
5126	+44.0	—44.3	44.1
5036	+45.5	—46.3	45.9
4950	+47.1	—47.8	47.4
4861	+49.8	—50.7	50.2
4793	+54.0	—53.7	53.8

The measurements were made in 2% aqueous solutions of the salts.

From these *bi-tartrates* the optically-active bases were set free, thoroughly dried and distilled in a high vacuum: the *d-benzedrine* boiled at 60° C. under 4 m.M., at 68° C. under 7 m.M. pressure, at 70° C. under 8 m.M. and at 80° C. under 12 m.M. pressure. The pure *l-benzedrine* boiled at 76° C. under a pressure of 10 m.M., at 80° C. under 12 m.M. and at 85° C. under 15 m.M. pressure.

The pure optically-active benzedrines are colourless, strongly refracting liquids, with a density of 0,9342 at 18° C.: for the *d*-base the value obtained was 0,9337, for the *l*-base 0,9346. Their taste is very bitter and strongly burning and not appreciably different either from each other, or from that of the racemic compound.

The refractive index of the antipodes for Na-light is 1,545. They do not crystallize in a bath of ice and sodium chloride, but readily do so in a bath of solid CO₂ and alcohol in which they are transformed into an aggregation of plate-shaped, colourless crystals. The rate of crystallization is, however, very small; once solidified, the crystals, on cautiously heating them very slowly, are transformed into a soft mass, without it being possible to fix a *sharp* meltingpoint of the solid substance. Endeavours to do this gave a maximum separation of the temperature-time-curves for the heating-bath and the air-surrounded solid substance, at about + 27°,5 C., although the

gradual softening of the mass already sets in at about 19° C. The solid substance is rather volatile and the molten mass yields a sublimate already as low as 40° C.

TABLE V. Rotatory Dispersion of *d*- and *l*-Benzedrine.

Wave-length in A.U.:	Specific Rotations $[\alpha]$ of		Mean Values of the Dispersion:
	<i>d</i> -Benzedrine:	<i>l</i> -Benzedrine:	
7280	+23.40	-22.62	23.0
6980	+24.03	-23.79	23.9
6730	+26.15	-25.88	26.1
6480	+28.59	-28.32	28.4
6262	+31.07	-30.82	30.9
6074	+33.50	-33.30	33.4
5893	+35.97	-35.72	35.8
5735	+38.53	-38.13	38.3
5592	+41.05	-40.64	40.8
5463	+43.56	-43.10	43.3
5340	+46.15	-45.59	45.9
5224	+48.74	-48.15	48.4
5126	+51.31	-50.59	50.9
5036	+53.87	-53.10	53.5
4950	+56.47	-55.61	56.1
4861	+58.91	-58.04	58.5
4793	+61.67	-60.58	61.1
4724	+64.19	-62.99	63.6
4658	+66.98	-65.21	66.1
4596	+69.80	-67.52	68.9
4537	+72.05	-70.46	71.3
4483	+74.81	-73.45	74.1
4430	+76.36	—	76.3
4380	+80.47	—	80.4

The salts of *benzedrine*, as well of the racemic as of the optically-active bases, all crystallize badly: the solutions have a strong tendency to supersaturation and the salts are usually deposited as conglomerations of fine needles. The sulphate still crystallizes the best: the sulphates of the optically-active bases are deposited as aggregations of extremely thin, rectangularly shaped plates which contain water of crystallization, but loose it most rapidly in contact with the air. The thin lamellae of the sulphate show, between crossed nicols, a rectangular extinction; in convergent light the plates prove to be perpendicular to the second bisectrix. The crystals are most probably ortho-rhombic. The rotary dispersion of the anhydrous sulphates is represented in Table VI.

These data — including those for the antipodes of *α*-phenylpropyl-

amine which will be communicated in a following paper, — are graphically represented in Fig. 5.

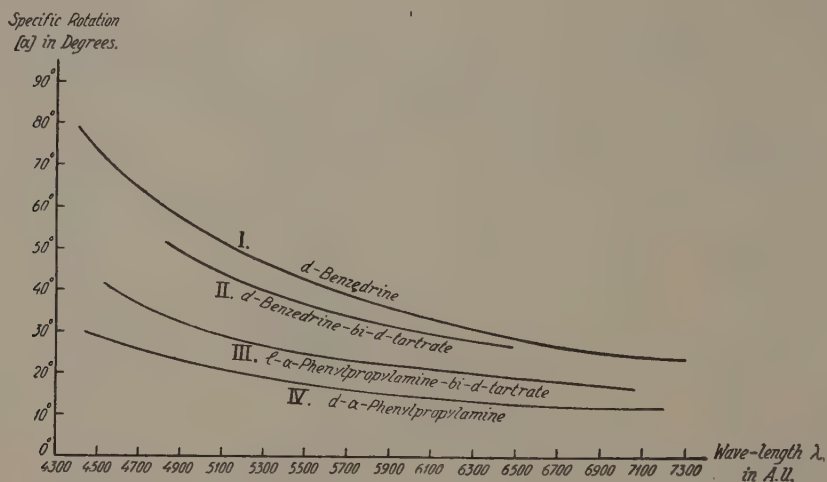


Fig. 5. Rotatory Dispersion of the Bitartrates and of the free Bases.

TABLE VI. Rotatory Dispersion of *d*- and *l*-Benzedrine-Sulphate.

Wave-length λ in A.U.	Specific Rotation $[\alpha]$	Specific Rotation $[\alpha]$	Mean Rotation $[\alpha]$
6980	+15.5	-18.0	± 16.7
6730	+18.5	-20.0	19.3
6480	+20.3	—	20.3
6262	+21.5	-23.5	22.5
6074	+23.3	-25.1	24.2
5893	+24.3	-26.2	25.3
5735	+27.0	-27.5	27.2
5592	+29.2	—	29.2
5463	+31.0	-29.5	30.3
5340	+33.0	—	33.0
5224	+34.5	-33.2	33.9
5126	+36.2	—	—
4950	—	-36.3	36.3
4793	+40.0	-37.4	38.7
4658	+42.3	—	42.3
4596	—	-46.0	46.0
4483	+46.5	-48.2	47.4

Measured in Solutions of 20%.

Evidently the rotatory dispersion of the optically-active benzedrines themselves and of their salts is in algebraic sign quite analogous; as later-on will be demonstrated, this is not longer true in the case of its isomeride.

Groningen, Laboratory for Inorganic and
Physical Chemistry of the University.

Mathematics. — *Ueber die Differentialkovariante erster Ordnung der binären kubischen Differentialform.* Von P. G. MOLENAAR. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK.)

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

In einer früheren Arbeit habe ich Differentialkovarianten erster Ordnung der binären kubischen und der binären biquadratischen Differentialform aufgestellt ¹⁾. Die Methode gründete sich auf die Elimination der Γ -Symbole aus den Gleichungen für die kovariante erste Ableitung.

Wie EMMY NOETHER aber angegeben hat, kann man die Differentialkovarianten auch gewinnen aus gewissen Differentialausdrücken, ohne Hilfe der CHRISTOFFELSchen Γ -Symbole ²⁾.

Ich habe im Folgenden diese Methode angewendet auf die binäre kubische Differentialform. Die Elimination der zweiten Differentiale gelingt durch Einführung von Kontravarianten. Man findet dann eine lineare Differentialkovariante erster Ordnung, die, abgesehen von einem Zahlenfaktor, nichts anderes ist als die schon früher aufgestellte Kovariante, und der man folgende Gestalt geben kann:

$$l_s = Q^{ikl} \frac{\partial a_{lks}}{\partial x_l} + a_{ls} \frac{\partial a^{il}}{\partial x_l}.$$

§ 1. Die binäre kubische Differentialform

$$f = a_{dx}^3 = a_{ikl} dx^i dx^k dx^l \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

besitzt drei Komitanten

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= a_{dx}^2 = (ab)^2 a_{dx} b_{dx} & R &= (a\beta)^2 = (ab)^2 (cd)^2 (ad)(bc) \\ Q &= (f, \Delta)^{(1)} = (a\alpha) a_{dx}^2 a_{dx} = (ab)^2 (ca) b_{dx} c_{dx}^2 = Q_{dx}^3 \end{aligned} \right\} \cdot (2)$$

Setzt man

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= +a^2 \\ a_2 &= -a^1 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$

¹⁾ Vgl. P. G. MOLENAAR, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **41**, 278—288 (1939) und **42**, 158—166 (1939).

²⁾ Vgl. E. NOETHER, Göttinger Nachrichten (15.1.1918) und R. WEITZENBÖCK, Invariantentheorie, S. 359.

so kann man aus (1) den kontravarianten Tensor

$$a^{ikl} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

bilden. Ferner sind

$$a_{ik}^l dx^i dx^k \frac{\partial}{\partial x_l} \quad \text{und} \quad a_i^{kl} dx^i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

gemischte Tensoren.

Einen Faktor 2. Art kann man anschreiben mit kovarianten Symbolen; auch aber mit kontravarianten Symbolen. Sie sind einander gleich, denn

$$(ab) = a_1 b_2 - a_2 b_1 = a^i b_i$$

$$(a' b') = a^1 b^2 - a^2 b^1 = a^i b_i.$$

Definiert man nach (3) auch kontravariante Symbole α^i , so ergeben sich noch die Tensorkomponenten:

$$\alpha^{ik} = (ab)^2 a^i b^k \quad \alpha_i^k = (ab)^2 a_i b^k$$

$$Q^{ikl} = (aa) a^{ik} \alpha^l \quad Q_i^{kl} = (aa) a_i^k \alpha^l = (aa) a^{kl} \alpha_l$$

$$Q_{ik}^l = (aa) a_{ik} \alpha^l = (aa) a_i^l \alpha_k = (aa) a_k^l \alpha_l.$$

Aus

$$\begin{aligned} a^{ikl} Q_{ikm} &= (aQ)^2 a^l Q_m = (bc)^2 (dc) (ad)^2 a^l b_m = \\ &= \frac{1}{2} (ad)^2 (bc)^2 (dc) (a^l b_m - b^l a_m) = \frac{1}{2} (ad)^2 (bc)^2 (dc) (ab) \delta_m^l \end{aligned}$$

folgt

$$a^{ikl} Q_{ikm} = \delta_m^l \cdot \frac{R}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (4a)$$

und daher auch

$$Q^{ikl} a_{ikm} = \delta_m^l \cdot \frac{-R}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (4b)$$

Es gibt noch eine andere Relation zwischen den oben definierten

$$a^{ikl}, Q^{ikl} \text{ und den } a_{ikl}, Q_{ikl}.$$

Mittels der absoluten quadratischen Kovariante

$$g_{dx}^2 = \left(\frac{-R}{2} \right)^\dagger a_{dx}^2 \text{ also } g_{ik} = \left(\frac{-R}{2} \right)^\dagger a_{ik} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (5)$$

kann man eine Zuordnung von kovarianten zu kontravarianten Symbolen festlegen.

Ist g^{pq} der algebraische Minor von g_{pq} aus $|g|$, so ist

$$g^{pq} = - \left(\frac{-R}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} a^{pq}$$

mit der Eigenschaft

$$g^{pq} g_{pr} = \delta_r^q.$$

Es sei bemerkt, dass für diese g^p und g_q nicht die Relation (3) gilt. Mit Hilfe von diesen g^{pq} kann man die Indizes von a_{ikl} „hinaufziehen“. Man findet dann

$$g^{i\lambda} g^{k\mu} g^{l\nu} a_{\lambda\mu\nu} = - \frac{4}{R^2} \alpha^{i\lambda} \beta^{k\mu} \gamma^{l\nu} a_{\lambda\mu\nu} = - \frac{4}{R^2} (\alpha a) (\beta a) (\gamma a) \alpha^\lambda \beta^\mu \gamma^\nu.$$

Nun ist

$$(\alpha a) (\beta a) (\gamma a) \alpha_{dx} \beta_{dx} \gamma_{dx} = \frac{R}{2} Q_{dx}^3$$

also

$$g^{i\lambda} g^{k\mu} g^{l\nu} a_{\lambda\mu\nu} = \frac{-2}{R} Q^{ikl} (6a)$$

Auf ähnlichem Wege erhält man:

$$g^{i\lambda} g^{k\mu} g^{l\nu} Q_{\lambda\mu\nu} = a^{ikl} (6b)$$

Für die Aufstellung der Differentialkovarianten erster Ordnung braucht man diese Relationen (6a) und (6b) nicht zu kennen.

§ 2. Sind dx^i und δx^i ($i = 1, 2$) zwei Reihen von Differentialen, so ist neben

$$f = a_{ikl} dx^i dx^k dx^l$$

auch die Polare

$$f_\delta = \frac{\partial f}{\partial (dx^i)} \delta x^i = 3 a_{ikl} \delta x^i dx^k dx^l$$

eine absolute Kovariante.

Das totale Differential einer absoluten Kovariante ist wieder eine Kovariante. Bildet man nun die Kovariante ²⁾

$$\Omega(f) = \delta f - df_{\circ}$$

so ergibt sich, dass die gemischten Differentiale δdx herausfallen, denn

$$\delta f = \frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} \delta x^m dx^i dx^k dx^l + 3 a_{ikl} \delta dx^i dx^k dx^l$$

$$df_{\circ} = 3 \frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} dx^m \delta x^i dx^k dx^l + 3 a_{ikl} d\delta x^i dx^k dx^l + 6 a_{ikl} \delta x^i d^2 x^k dx^l$$

also

$$\Omega(f) = \left(\frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} - 3 \frac{\partial a_{mkl}}{\partial x_i} \right) \delta x^m dx^i dx^k dx^l - 6 a_{mkl} \delta x^m d^2 x^k dx^l$$

woraus folgt, dass

$$\Phi_m = \left(\frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} - 3 \frac{\partial a_{mkl}}{\partial x_i} \right) dx^i dx^k dx^l - 6 a_{mkl} d^2 x^k dx^l. \quad (7)$$

die *Komponenten eines kovarianten Vektors* sind.

In gleicher Weise kann man aus der absoluten Kovariante

$$Q_{dx}^{*3} = \left(\frac{-R}{2} \right)^{-1} Q_{dx}^3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (8)$$

einen Vektor mit Komponenten

$$\psi_s = \left(\frac{\partial Q_{ikl}^*}{\partial x_s} - 3 \frac{\partial Q_{skl}^*}{\partial x_i} \right) dx^i dx^k dx^l - 6 Q_{skl}^* d^2 x^k dx^l. \quad (9)$$

ableiten.

Die Elimination der zweiten Differentiale aus (7) und (9) gelingt nun so: überschiebt man (7) mit α_s^m so entsteht der Vektor

$$X_s = \alpha_s^m \Phi_m = \alpha_s^m \left(\frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} - 3 \frac{\partial a_{mkl}}{\partial x_i} \right) dx^i dx^k dx^l - 6 \alpha_s^m a_{mkl} d^2 x^k dx^l.$$

Nun ist

$$\alpha_s^m a_{mkl} = (a a) \alpha_s a_{kl} = -Q_{skl}.$$

Daher ist

$$X_s = \alpha_s^m \left(\frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} - 3 \frac{\partial a_{mkl}}{\partial x_i} \right) dx^i dx^k dx^l + 6 Q_{skl} d^2 x^k dx^l. \quad (10)$$

Somit folgt aus (8), (9) und (10)

$$P_s = X_s + \left(\frac{-R}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \Phi_s = \\ = \left\{ \alpha_s^m \left(\frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} - 3 \frac{\partial a_{mkl}}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{-R}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial Q_{ikl}^*}{\partial x_s} - 3 \frac{\partial Q_{skl}^*}{\partial x_i} \right) \right\} dx^i dx^k dx^l.$$

Ueberschiebt man schliesslich diesen Tensor vierter Stufe

$$P_{ikl,s} = \alpha_s^m \left(\frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} - 3 \frac{\partial a_{mkl}}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{-R}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial Q_{ikl}^*}{\partial x_s} - 3 \frac{\partial Q_{skl}^*}{\partial x_i} \right)$$

mit a^{ikl} , so bekommt man den *linearen Tensor*

$$T_s = a^{ikl} P_{ikl,s} = \\ = a^{ikl} \alpha_s^m \left(\frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} - 3 \frac{\partial a_{mkl}}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{-R}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a^{ikl} \left(\frac{\partial Q_{ikl}^*}{\partial x_s} - 3 \frac{\partial Q_{skl}^*}{\partial x_i} \right).$$

Nun ist wegen (8) und (4a)

$$\left(\frac{-R}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a^{ikl} \left(\frac{\partial Q_{ikl}^*}{\partial x_s} - 3 \frac{\partial Q_{skl}^*}{\partial x_i} \right) = \\ = a^{ikl} \left\{ \left(\frac{\partial Q_{ikl}}{\partial x_s} - 3 \frac{\partial Q_{skl}}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2R} \left(Q_{ikl} \frac{\partial R}{\partial x_s} - Q_{skl} \frac{\partial R}{\partial x_i} \right) \right\} = \\ = - \left(Q_{ikl} \frac{\partial a^{ikl}}{\partial x_s} - 3 Q_{skl} \frac{\partial a^{ikl}}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{4} \frac{\partial R}{\partial x_s}$$

und da ³⁾

$$\frac{1}{4} \frac{\partial R}{\partial x_s} = (\varphi Q)^3 \psi_s = \frac{\partial a^{ikl}}{\partial x_s} Q_{ikl}$$

bekommt man

$$T_s = a^{ikl} \alpha_s^m \left(\frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} - 3 \frac{\partial a_{mkl}}{\partial x_i} \right) - \left(2 Q_{ikl} \frac{\partial a^{ikl}}{\partial x_s} - 3 Q_{skl} \frac{\partial a^{ikl}}{\partial x_i} \right). \quad (11)$$

§ 3. Diese lineare Differentialkovariante T ist, abgesehen von einem Zahlenfaktor, nichts anderes als die früher aufgestellte Kovariante

$$l_{dx} = (\varphi\psi) (\varphi a)^2 (aa) a_{dx} - (\varphi a)^2 (\varphi a) (\psi a) a_{dx} = I - II. \quad . \quad . \quad (12)$$

³⁾ Vgl. P. G. MOLENAAR, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 42, 257—261 (1939).

Man findet leicht:

$$\begin{aligned}
 T_s &= (a\varphi)^3 (\alpha\psi) \alpha_s - 3 (a\varphi)^2 (a\psi) (\alpha\varphi) \alpha_s - 2 (\varphi Q)^3 \psi_s + 3 (\varphi Q)^2 (\varphi\psi) Q_s = \\
 &= -2 (a\varphi)^2 (\alpha\psi) (a\varphi) \alpha_s - (a\varphi)^2 (a\alpha) (\varphi\psi) \alpha_s - 2 (\varphi a)^2 (\varphi\alpha) (a\alpha) \psi_s + \\
 &\quad + 3 (\varphi a)^2 (a\alpha) (\varphi\psi) \alpha_s = \\
 &= 4 I_s - 2 \{ (a\varphi)^2 (\alpha\psi) (a\varphi) \alpha_s + (\varphi a)^2 (\varphi\alpha) (a\alpha) \psi_s \} = \\
 &= 4 I_s - 2 (a\varphi)^2 (\alpha\psi) (\alpha\varphi) a_s = \\
 &= 4 I_s - 2 \{ (a\varphi) (\alpha\varphi) (a\psi) (\alpha\varphi) a_s - (a\varphi) (a\alpha) (\varphi\psi) (\alpha\varphi) a_s \} = \\
 &= 4 I_s - 2 \{ (\varphi a)^2 (\psi a) (\varphi a) a_s - (a\varphi) (a\alpha) (\varphi\psi) (a\varphi) \alpha_s \} = \\
 &= 4 I_s - 2 (I_s + II_s) = 2 (I_s - II_s) = 2 I_s.
 \end{aligned}$$

Der Kovariante l_{dx} kann man noch eine andere Gestalt geben. Durch umformen entsteht:

$$\begin{aligned}
 l_s &= (\varphi\psi) (\varphi a)^2 (a\alpha) \alpha_s - (\varphi a)^2 (\varphi a) (\psi a) a_s = \\
 &= (\varphi\psi) (\varphi Q)^2 Q_s + (\dot{\alpha}\beta) (\dot{\alpha}\sigma) \beta_s - \frac{1}{2} (\dot{\alpha}\beta)^2 \sigma_s = \\
 &= (Q\psi) (\varphi Q)^2 \varphi_s - (Q\varphi)^3 \psi_s + (\dot{\alpha}\beta) (\dot{\alpha}\sigma) \beta_s - \frac{1}{2} (\dot{\alpha}\beta)^2 \sigma_s = \\
 &= (Q\varphi)^2 (Q\psi) \varphi_s + (\dot{\alpha}\beta) (\dot{\alpha}\sigma) \beta_s
 \end{aligned}$$

also

$$l_s = Q^{ikl} \frac{\partial a_{iks}}{\partial x_l} + a_{is} \frac{\partial \alpha^{il}}{\partial x_l} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (13)$$

Da

$$a_{is} \alpha^{il} = \delta_s^l \cdot \frac{R}{2}$$

ist wegen (4b)

$$l_s = -a_{iks} \frac{\partial Q^{ikl}}{\partial x_l} - \alpha^{il} \frac{\partial a_{is}}{\partial x_l} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (14)$$

Mathematics. — *Ein Satz über schlichte Funktionen.* Von N. G. DE BRUIJN. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

Bekanntlich hat R. NEVANLINNA¹⁾ bewiesen, dass eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

die den Einheitskreis schlicht auf einen Stern mit $w = 0$ als Mittelpunkt abbildet, den Ungleichungen $|a_n| \leq n$ ($n = 1, 2, \dots$) genügt. In dieser Note wird dieser Satz ausgedehnt auf etwas allgemeinere Gebiete, wovon die wichtigsten Sterne mit beliebigen Mittelpunkten sind.

Wir sagen, dass ein Gebiet G in Bezug auf einen Punkt a (bzw. eine Richtung l) zur Klasse S gehört, wenn jede Gerade durch a (bzw. $//l$) höchstens eine Strecke mit G gemeinsam hat. Die Klasse S umfasst die Sterngebiete, denn wenn a im Innern von G liegt, so ist G ein Stern in Bezug auf a . Für die S -Gebiete beweise ich die NEVANLINNASCHEN Ungleichungen und noch etwas mehr.

Schicken wir erst einen Hilfssatz voraus:

Hilfssatz.

$$w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

sei regulär in $|z| < 1$, stetig und schlicht in $|z| \leq 1$; ϑ sei eine reelle Zahl. Die Gerade durch die Punkte $f(e^{i\vartheta})$ und $f(-e^{i\vartheta})$ in der w -Ebene habe mit dem Bilde von $|z| < 1$ nur die Strecke $\{f(e^{i\vartheta}), f(-e^{i\vartheta})\}$ gemeinsam. Dann gelten die Ungleichungen ($a_0 = 0$):

$$|a_{n+2} e^{(n+2)i\vartheta} - a_n e^{ni\vartheta}| \leq 2|a_1|, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \dots \quad (1)$$

und also

$$|a_n| \leq n|a_1|.$$

Beweis. Evident existieren reelle Zahlen μ und α , derart, dass

$$\Im(f(z) e^{-i\mu} - i\alpha) \geq 0 \quad \text{für} \quad \Im(z e^{-i\vartheta}) \geq 0, |z| = 1.$$

$$\Im(f(z) e^{-i\mu} - i\alpha) \leq 0 \quad \text{für} \quad \Im(z e^{-i\vartheta}) \leq 0, |z| = 1.$$

Für alle $|z| = 1$ gilt also

$$\begin{aligned} \Im \{ \sin(\arg z - \vartheta) \cdot (f(z) e^{-i\mu} - i\alpha) \} &\geq 0, \quad \text{oder} \\ \Re \{ (z^{-1} e^{i\vartheta} - z e^{-i\vartheta}) \cdot (f(z) e^{-i\mu} - i\alpha) \} &\geq 0. \quad \dots \quad (2) \end{aligned}$$

¹⁾ Oeversikt av Finska-Vetensk. Soc.-Förh., Bd. 63 (A) Nr 6 (1920—1921).

Weiter ist für $|z|=1$:

$$\Re(iaz e^{-i\vartheta} + iaz^{-1} e^{i\vartheta}) = 0. \quad (3)$$

Die Funktion

$$\begin{aligned} \phi(z) &= (z^{-1} e^{i\vartheta} - z e^{-i\vartheta})(f(z) e^{-i\mu} - ia) + iaz e^{-i\vartheta} + iaz^{-1} e^{i\vartheta} = \\ &= a_1 e^{i(\vartheta-\mu)} + z(a_2 e^{i(\vartheta-\mu)} + 2ia e^{-i\vartheta}) + \sum_{n=2}^{\infty} z^n (a_{n+1} e^{i(\vartheta-\mu)} - a_{n-1} e^{-i(\vartheta+\mu)}) \end{aligned}$$

ist für $|z| < 1$ regulär und für $|z| \leq 1$ stetig. Wegen (2) und (3) genügt $\phi(z)$ der Ungleichung $\Re \phi(z) \geq 0$. Nach dem CARATHÉODORYschen Satz betreffs Funktionen mit positivem Realteil ist jetzt:

$$\begin{aligned} \Re a_1 e^{i(\vartheta-\mu)} &\geq 0, \text{ und} \\ |a_2 e^{i(\vartheta-\mu)} + 2ia e^{-i\vartheta}| &\leq 2 \Re a_1 e^{i(\vartheta-\mu)}, \\ |a_{n+1} e^{i(\vartheta-\mu)} - a_{n-1} e^{-i(\vartheta+\mu)}| &\leq 2 \Re a_1 e^{i(\vartheta-\mu)} \quad (n \geq 2). \quad (4) \end{aligned}$$

Die Behauptung erfolgt aus (4) und der BIEBERBACHschen Ungleichung $|a_2| \leq 2|a_1|$.

Bemerkung: Ist $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär, in $|z| \leq 1$ stetig und schlicht, und setzt man die a_n als reell voraus, so kann man $\vartheta = \mu = \alpha = 0$ nehmen, und man erlangt die Ungleichungen von J. DIEUDONNÉ¹⁾

$$|a_{n+2} - a_n| \leq 2|a_1|, \quad |a_n| \leq n|a_1| \quad (n \geq 0).$$

Satz.

$$w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

sei regulär und schlicht in $|z| < 1$, das Bild G von $|z| < 1$ in der w -Ebene gehöre zur Klasse S in Bezug auf a (bezw. l). Dann gibt es eine reelle Zahl ϑ derart, dass die Ungleichungen (1) erfüllt sind.

Beweis. Wir definieren zuerst eine Unterklasse der Klasse S : wir sagen, dass ein Gebiet G in Bezug auf a (bezw. l) zur Klasse S' gehört, wenn

1. G in Bezug auf a (bezw. l) zu S gehört,
2. Der Rand von G eine geschlossene doppeltpunktfreie Jordankurve J ist,
3. a nicht auf J liegt, und
4. jede Gerade durch a (bezw. $//l$), die J in zwei verschiedenen Punkten trifft, die dazwischen gelegene Strecke mit G gemeinsam hat²⁾.

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, dass G in Bezug auf einen Punkt a zu S' gehört (im Fall einer gegebenen Richtung l verläuft

¹⁾ J. DIEUDONNÉ: C. R. Acad. Sc. Paris, **192**, 1148—1150 (1931). W. ROGOSINSKI. Math. Zeitschr. **35**, 93—121 (1932). O. SZÁSZ: Jhrber. d. Deutsch. Math. Verein., **42**, 73—75 (1932).

²⁾ Diese letzte Beschränkung hat dann und nur dann Zweck, wenn a nicht in G liegt.

Mathematics. — *Sur un principe de variation de GAUSS dans la théorie du potentiel.* Par A. F. MONNA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

§ 1. *La notion de „balayage” d’une distribution de masse.*

Soit dans un espace euclidien R à trois dimensions Ω un ensemble ouvert à frontière bornée, entièrement extérieure Σ . Posons $\Omega + \Sigma = F$.

Soit θ une distribution de masse positive sur Ω avec potentiel V . On suppose que — si Ω n’est pas borné — toute la masse se trouve sur un sous-ensemble borné de Ω . Par le „balayage” de θ sur Σ on entend la construction d’une distribution positive sur Σ telle que le potentiel de cette nouvelle distribution égale V sur le complémentaire $C\Omega$ de Ω . Si cela ne soit pas possible, on demande au moins de construire une distribution telle que la condition soit satisfaite „aussi bien que possible”; il faut alors naturellement préciser ces derniers mots. Cette circonstance se présente en effet: l’égalité en tout point de $C\Omega$ n’est pas possible en général. On sait cependant qu’une et une seule solution existe si l’on remplace la condition par: 1°. égalité des deux potentiels sur CF et 2°. égalité des potentiels sur Σ sauf peut être aux points d’un sous-ensemble de Σ de capacité nulle (c. a. d. à peu près partout sur Ω). On a montré ce théorème par deux voies essentiellement différentes.

a. La première méthode repose sur un théorème de F. RIESZ, exprimant que toute fonction surharmonique peut s’écrire comme la somme d’une fonction harmonique et du potentiel d’une distribution de masse positive, d’ailleurs uniquement déterminée. La distribution cherchée est alors celle

qui correspond à la fonction surharmonique $\widehat{(\bar{V}, V)}$, où \bar{V} désigne la meilleure minorante harmonique de V^1).

Cette méthode correspond à la méthode de WIENER pour construire la solution généralisée du problème de DIRICHLET, laquelle consiste à écrire Ω comme limite d’une suite croissante d’ensembles ouverts, tous contenus dans Ω .

b. La deuxième méthode repose sur le principe suivant dû à GAUSS et montré au cas général par FROSTMAN ²⁾.

¹⁾ M. BRELOT, Fonctions sous-harmoniques et balayage. Bull. Acad. royale de Belgique 24 (1938).

²⁾ O. FROSTMAN, Potentiel d’équilibre et capacité des ensembles. Meddel. från Lunds Univ. Mat. Sem. (1935).

Soit $\varrho(e)$ une distribution quelconque de masse positive sur Σ , U son potentiel. Considérons l'intégrale

$$\int_{\Sigma} (U - 2V) d\varrho.$$

On démontre qu'il existe une et une seule distribution qui, parmi toutes les distributions possibles, minimise cette intégrale. Cette distribution $\underline{\mu}(e)$ satisfait aux conditions imposées.

Remarquons encore que le potentiel n'augmente nulle part par le balayage (toujours si les masses sont positives).

§ 2. La notion de „extrémisation” d'une distribution de masse.

BRELOT a généralisé le procédé de WIENER, mentionné ci-dessus. Il remarque que chaque ensemble fermé est la limite d'une suite décroissante d'ensembles ouverts, tous contenant l'ensemble donné. Par un procédé tout à fait analogue à celui de WIENER, on fait correspondre alors à chaque ensemble fermé F une fonction, nommée „solution du problème de DIRICHLET pour F ”. À chaque distribution sur F correspond une distribution sur la frontière de F telle que le potentiel n'est nulle part augmenté et même égale le potentiel originel sur CF . Cette transformation, analogue au balayage, est nommée „extrémisation” ¹⁾. Nous désignons la distribution obtenue par $\bar{\mu}(e)$.

Considérons encore l'ensemble ouvert Ω du début de § 1. À la distribution θ correspondent donc au moins deux distributions, $\underline{\mu}$ et $\bar{\mu}$, sur Σ telles que le potentiel est partout au plus égal à celui de θ et est même conservé sur $C(\Omega + \Sigma) = CF$. Remarquons que $\bar{\mu}$ ne possède pas, comme $\underline{\mu}$, la propriété que le potentiel est conservé à peu près partout sur Σ (pourvu que $\underline{\mu} \not\equiv \bar{\mu}$). Mais il existe encore plus de distributions possédant ces propriétés. En effet, on peut généraliser la méthode de WIENER—BRELOT pour ensembles E quelconques ²⁾. À E correspondent alors deux distributions sur la frontière de E (qui sont certainement identiques si E est fermé ou ouvert). On obtient donc d'autres distributions sur Σ , satisfaisant aux conditions, en prenant pour E un sous-ensemble de F à frontière Σ .

En tous ces cas la construction de la distribution se fait d'une manière analogue à la méthode a du § 1.

La question se pose donc si l'on peut caractériser ces distributions — en particulier $\bar{\mu}$ — d'un façon analogue à la méthode b. Une telle caractérisation sera donnée ci-dessous.

¹⁾ M. BRELOT. Critères de régularité et de stabilité. Bull. Ac. Royale de Belgique 25 (1939).

²⁾ A. F. MONNA. Extension du problème de Dirichlet pour ensembles quelconques. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam 43, 497 (1940).

Pour $k \rightarrow \infty$ le membre à droite tend vers l'extrémale $\mathring{V}(P)$ de $V(P)$ sur F . Donc

$$U(P) \equiv \mathring{V}(P)$$

et avec (1b)

$$U(P) \equiv (\mathring{V}(P), V(P)).$$

Donc partout

$$U(P) \equiv \int_{\Sigma} \frac{d\bar{\mu}(e_Q)}{r_{PQ}} \dots \dots \dots (3)$$

Il résulte de (2) et (3) qu'on a

$$\int_{\Sigma} \frac{d\varrho(e_Q)}{r_{PQ}} = \alpha(P) \int_{\Sigma} \frac{d\bar{\mu}(e_Q)}{r_{PQ}} + (1-\alpha(P)) \int_{\Sigma} \frac{d\underline{\mu}(e_Q)}{r_{PQ}} \dots \dots (4)$$

avec

$$0 \leq \alpha(P) \leq 1. \dots \dots \dots (5)$$

Remarquons que $\alpha(P)$ n'est pas uniquement déterminé par cette dernière équation aux points de CF et aux points stables de Σ parce que les deux intégrales à droite y sont égales: on obtient une forme indéterminée pour α . Il en résulte qu'il faudrait séparer dans toutes les intégrales qui suivent une partie où α n'est pas déterminé. Pour raisons de simplification nous ne le ferons cependant pas, puisque justement par le fait que les deux intégrales mentionnées y sont égales, les résultats n'en changent pas. Nous supposons donc $\alpha(P)$ convenablement défini dans tous les points où il reste indéterminé par (4).

La relation (4) est susceptible d'une généralisation considérable. Soit $f(Q)$ une fonction continue sur Σ . On sait que f peut s'obtenir comme limite des potentiels d'une suite de distributions θ_n sur R (généralement pas seulement sur Σ ; la suite des potentiels converge uniformément). On a

$$\int_{\Sigma} f(Q) d\varrho(e_Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} d\varrho(e_Q) \int_R \frac{d\theta_n(S)}{r_{SQ}} \dots \dots \dots (6)$$

Avec (4) l'intégrale à droite se réduit à

$$\int_{\Sigma} d\underline{\mu}(e_Q) \int_R \frac{d\theta_n(S)}{r_{SQ}} + \int_R \alpha(S) d\theta_n(S) \left[\int_{\Sigma} \frac{d\bar{\mu}(e_Q)}{r_{SQ}} - \int_{\Sigma} \frac{d\underline{\mu}(e_Q)}{r_{SQ}} \right]. \quad (7)$$

On voit donc par (5) que l'intégrale se trouve entre les bornes

$$\int_{\Sigma} d\underline{\mu}(e_Q) \int_R \frac{d\theta_n(S)}{r_{SQ}} \quad \text{et} \quad \int_{\Sigma} d\bar{\mu}(e_Q) \int_R \frac{d\theta_n(S)}{r_{SQ}}.$$

Faisons alors $n \rightarrow \infty$. On obtient

$$\int_{\Sigma} f(Q) d\varrho(e_Q) = \lambda_f \int_{\Sigma} f(Q) d\bar{\mu}(e_Q) + (1 - \lambda_f) \int_{\Sigma} f(Q) d\mu(e_Q) \quad (8)$$

$$0 \leq \lambda_f \leq 1.$$

Ici, λ_f est une fonctionnelle de f .

On voit que cette relation subsiste si f est une fonction bornée, appartenant à une quelconque des classes de BAIRE. Prenons alors pour f la fonction caractéristique d'un sous-ensemble quelconque mesurable (B) de Σ . Alors on obtient

$$\varrho(e) = \lambda_e \bar{\mu}(e) + (1 - \lambda_e) \mu(e). \quad (9)$$

$$0 \leq \lambda_e \leq 1.$$

Nous transformons cette relation comme il suit. Par un calcul simple on voit que l'intégrale à droite de (6) peut s'écrire

$$\int_{\Sigma} \xi_n(Q) d\bar{\mu}(e_Q) \int_R \frac{d\theta_n(S)}{r_{SQ}} + \int_{\Sigma} (1 - \xi_n(Q)) d\mu(e_Q) \int_R \frac{d\theta_n(S)}{r_{SQ}}$$

où

$$\int_R \frac{a(S)}{r_{SQ}} d\theta_n(S) = \xi_n(Q) \int_R \frac{d\theta_n(S)}{r_{SQ}} \quad (10)$$

Remarquons alors que par la définition même la suite des potentiels de $\{\theta_n\}$ est partout convergente, de sorte que le potentiel de la distribution $\theta_n - \theta_{n+p}$ ($p > 0$) tend vers zéro partout si $n \rightarrow \infty$. On en tire que la suite $\{\theta_n(e) - \theta_{n+p}(e)\}$ tend vers zéro pour chaque e si $n \rightarrow \infty$ ¹⁾ et le même est vrai pour la variation positive et la variation négative de $\theta_n - \theta_{n+p}$. En vertu de (5) il s'en suit que la différence

$$\int_R \frac{a(S)}{r_{SQ}} d[\theta_n - \theta_{n+p}]$$

peut être rendue arbitrairement petite à fortiori en chaque point Q pour n assez grand. La limite pour $n \rightarrow \infty$ du membre à gauche de l'équation précédente existe donc²⁾. Puisque l'intégrale à droite tend vers 1 sur e , on peut donc écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(Q) = \xi_e(Q).$$

¹⁾ Voir la démonstration d'un théorème de M. RIESZ dans les Acta de Szeged IX (1938) p. 10.

²⁾ Remarquons que si l'on substitue pour a les termes d'une suite convergente $\{a_i\}$, la convergence est uniforme par rapport à i . Ceci sera utilisé plus tard.

La fonction bornée ξ_e dépend encore de e . On a donc

$$\varrho(e) = \int_e \xi_e(Q) d\bar{\mu}(e_Q) + \int_e (1 - \xi_e(Q)) d\underline{\mu}(e_Q).$$

Or on a

$$\begin{aligned} \varrho(e) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_i \varrho(\Delta_{1/i} e) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_i \int_{\Delta_{1/i} e} \xi d\bar{\mu} + \text{terme analogue} \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_e \xi_i^* d\bar{\mu} + \dots \end{aligned}$$

Ici, ξ_i , défini sur $\Delta_{1/i} e$, désigne la fonction correspondant à $\Delta_{1/i} e$ au sens mentionné. ξ_i^* est défini sur tout Σ ; on a $\xi_i^*(Q) = \xi_i(Q)$ si Q est sur $\Delta_{1/i} e$. Soit alors $e_1 \subset e_2$. On peut arranger de sorte que chaque terme de la suite des fonctions continues tendant vers la fonction caractéristique de e_1 , est au plus égale au terme correspondant de la suite analogue pour e_2 . Donc

$$\int \frac{1}{r_{SQ}} d\theta_n^{(e_1)}(S) \equiv \int \frac{1}{r_{SQ}} d\theta_n^{(e_2)}(S) \equiv C$$

Il s'ensuit comme ci-dessus que la limite

$$\lim_{e \rightarrow Q} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{\alpha(S)}{r_{SQ}} d\theta_n^{(e)}(S)$$

existe. Donc, $\lim \xi_i^*$ existant et les ξ_i^* étant bornés dans leur ensemble, on a

$$\varrho(e) = \int_e \xi(Q) d\bar{\mu}(e_Q) + \int_e (1 - \xi(Q)) d\underline{\mu}(e_Q) \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

où ξ est une fonction bornée définie sur Σ^1 . On a (voir (9))

$$0 \equiv \xi(Q) \equiv 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

§ 4. Extension du principe de GAUSS.

L'intégrale

$$\int_{\Sigma} (U - 2V) d\varrho(e_Q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

¹⁾ Il va sans dire que ξ dépend de $\varrho(e)$, donc du choix de $\lambda(e)$ dans la formule (9).

n'est évidemment pas bornée supérieurement si l'on ne restreint pas la classe des distributions ϱ . On peut seulement dire alors qu'elle est bornée inférieurement et atteint sa borne inférieure pour $\varrho = \underline{\mu}$. Nous allons montrer qu'elle a aussi un maximum si l'on ne considère que des distributions dont le potentiel satisfait aux conditions (1a) et (1b). Ce maximum sera atteint pour $\varrho = \bar{\mu}$.

Substitution de (9) en (13) donne (nous supprimons dans r , $\underline{\mu}$ et $\bar{\mu}$ les variables)

$$\begin{aligned} F[\lambda] \equiv \int_{\Sigma} (U - 2V) d\varrho = & \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{1}{r} d\lambda \bar{\mu} d\lambda \bar{\mu} - 2 \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{1}{r} d\lambda \bar{\mu} d\lambda \underline{\mu} + \\ & + \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{1}{r} d\lambda \underline{\mu} d\lambda \underline{\mu} + 2 \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{1}{r} d\lambda \bar{\mu} d\underline{\mu} - 2 \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{1}{r} d\underline{\mu} d\lambda \underline{\mu} + 2 \int V d\lambda \underline{\mu} - \\ & - 2 \int V d\lambda \bar{\mu} + \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{1}{r} d\underline{\mu} d\underline{\mu} - 2 \int V d\underline{\mu}. \end{aligned}$$

Pour $\lambda = 1$ on obtient

$$\int (U_{\bar{\mu}} - 2V) d\bar{\mu},$$

pour $\lambda = 0$

$$\int (U_{\underline{\mu}} - 2V) d\underline{\mu}.$$

De l'inégalité (2) il résulte que $F[\lambda]$ est borné supérieurement. La borne supérieure est accessible. Ceci est une conséquence de ce que de toute suite $\{\lambda_i(e)\}$ on peut extraire une suite partielle convergente et parce que $F[\lambda]$ est une fonctionnelle continue de λ . On montre ce dernier point comme il suit.

D'abord on a en vertu de (11) et puisque ξ_i est positif (nous écrivons seulement le premier terme du développement de $F[\lambda]$, les autres termes étant tout analogues)

$$\iint \frac{1}{[r_{Q_1 Q_2}]_p} d(\lambda_i \bar{\mu})_{Q_1} d(\lambda_i \bar{\mu})_{Q_2} = \iint \frac{1}{[r_{Q_1 Q_2}]_p} \xi_i(Q_1) \xi_i(Q_2) d\bar{\mu}_{Q_1} d\bar{\mu}_{Q_2}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} [r]_p &= p & \text{si } r \leq p \\ [r]_p &= r & \text{si } r > p \end{aligned}$$

Pour $p \rightarrow \infty$ on obtient, en vertu d'un théorème connu ¹⁾

$$A_{\lambda_i} \equiv \iint_{\Sigma} \frac{1}{r_{Q_1 Q_2}} d(\lambda_i \bar{\mu})_{Q_1} d(\lambda_i \bar{\mu})_{Q_2} = \iint_{\Sigma} \frac{1}{r_{Q_1 Q_2}} \xi_i(Q_1) \xi_i(Q_2) d\mu_{Q_1} d\bar{\mu}_{Q_2}.$$

Remarquons maintenant, comme on voit aisément successivement par les formules 9, 4 et 10 (remarquer la note 2, p. 54), qu'à la suite convergente $\{\lambda_i\}$ correspond une suite convergente $\{\xi_i(Q)\}$ et que les limites λ et ξ se correspondent. On en tire en appliquant un théorème de la théorie des intégrales de RADON—STIELTJES ²⁾

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A_{\lambda_i} = A_{\lambda},$$

d'où sort la continuité de $F[\lambda]$.

Si la borne supérieure est atteinte pour $\lambda \equiv 1$, le théorème est montré.

Supposons donc que $\lambda \neq 1$. Alors la variation de F est négative ou zéro pour cette valeur de λ et pour toutes les variations permises de λ :

$$\delta F[\lambda(e)] \leq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Cela conduira à une contradiction. Posons pour abrégé

$$\iint \frac{1}{r} d\varrho d\sigma = I(\varrho, \sigma).$$

On trouve

$$\begin{aligned} \delta F = & 2I(\lambda \bar{\mu}, \delta \lambda \bar{\mu}) - 2I(\delta \lambda \bar{\mu}, \lambda \underline{\mu}) - 2I(\lambda \bar{\mu}, \delta \lambda \underline{\mu}) + 2I(\lambda \underline{\mu}, \delta \lambda \underline{\mu}) + \\ & + I(\delta \lambda \bar{\mu}, \delta \lambda \bar{\mu}) - 2I(\delta \lambda \bar{\mu}, \delta \lambda \underline{\mu}) + I(\delta \lambda \underline{\mu}, \delta \lambda \underline{\mu}) + \\ & + 2I(\underline{\mu}, \delta \lambda \bar{\mu}) - 2I(\underline{\mu}, \delta \lambda \underline{\mu}) + 2 \int V d\delta \lambda \underline{\mu} - 2 \int V d\delta \lambda \bar{\mu}. \end{aligned}$$

Pour $\lambda \equiv 0$ et $\delta \lambda > 0$ on a $\delta F \geq 0$ puisque F atteint sa plus petite valeur pour $\lambda = 0$ dans la classe des fonctions $0 \leq \lambda \leq 1$. En posant $\delta \lambda = \varepsilon \varphi$, où $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, on a donc si $\varphi \geq 0$,

$$I(\underline{\mu}, \varphi \bar{\mu}) - I(\underline{\mu}, \varphi \underline{\mu}) + \int V d\varphi \underline{\mu} - \int V d\varphi \bar{\mu} \geq 0. \quad . \quad . \quad (15)$$

¹⁾ Si la fonction f_n est décroissante de n et bornée supérieurement par un nombre fixe, enfin tend vers f , on a pour toute distribution μ (≥ 0 ou ≤ 0) sur un ensemble borné: $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$ (M. BRELOT, Ac. de Belgique **24**, p. 303).

²⁾ Si $\lim f_n(\lambda) = f(\lambda)$ et $|f_n(\lambda)| \leq \phi(\lambda)$, où ϕ est ϱ -intégrable, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(\lambda) d\varrho(\lambda) = \int f(\lambda) d\varrho(\lambda).$$

Noter la borne exprimée par la formule (12).

L'impossibilité de (14) pour *tout* $\delta\lambda$ est montrée si nous prouvons que

$$(\delta F)_\lambda - (\delta F)_{\lambda=0} > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

pour de valeurs *spéciales* de φ . En vertu de (15), (16) se réduit à

$$I(\lambda \bar{\mu}, \varphi \bar{\mu}) - I(\varphi \bar{\mu}, \lambda \underline{\mu}) - I(\lambda \bar{\mu}, \varphi \underline{\mu}) + I(\lambda \underline{\mu}, \varphi \underline{\mu}) > 0.$$

On peut satisfaire cette inégalité pour $\varphi = C\lambda$ où C est une constante positive ¹⁾. Puisque $I(\lambda \bar{\mu}, \lambda \underline{\mu}) > 0$ (voir FROSTMAN l.c. p. 28), il suffit de montrer que

$$[I(C\lambda \bar{\mu}, \lambda \underline{\mu}) + I(\lambda \bar{\mu}, C\lambda \underline{\mu})]^2 < 4I(\lambda \bar{\mu}, C\lambda \bar{\mu}) I(\lambda \underline{\mu}, C\lambda \underline{\mu})$$

ou

$$[I(\lambda \bar{\mu}, \lambda \underline{\mu})]^2 < I(\lambda \bar{\mu}, \lambda \bar{\mu}) I(\lambda \underline{\mu}, \lambda \underline{\mu}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Remarquons maintenant que l'on a (FROSTMAN l.c. p. 30)

$$I(\lambda \bar{\mu}, \lambda \underline{\mu}) = \frac{1}{\pi^3} \int_R \left[\int_\Sigma \frac{d(\lambda \bar{\mu})_P}{r_{PM}^2} \cdot \int_\Sigma \frac{d(\lambda \underline{\mu})_Q}{r_{QM}^2} \right] d\tau_M,$$

$$I(\lambda \bar{\mu}, \lambda \bar{\mu}) = \frac{1}{\pi^3} \int_R \left[\int_\Sigma \frac{d(\lambda \bar{\mu})_Q}{r_{QM}^2} \right]^2 d\tau_M$$

$$I(\lambda \underline{\mu}, \lambda \underline{\mu}) = \frac{1}{\pi^3} \int_R \left[\int_\Sigma \frac{d(\lambda \underline{\mu})_Q}{r_{QM}^2} \right]^2 d\tau_M.$$

Alors (16) se réduit à (notation évidente)

$$\left[\int_R f_1(M) f_2(M) d\tau_M \right]^2 < \int_R [f_1(M)]^2 d\tau_M \cdot \int_R [f_2(M)]^2 d\tau_M. \quad (18)$$

c. à d. à l'inégalité de SCHWARZ. Il ne reste donc que de montrer que

¹⁾ S'il y a des sous-ensembles de Σ où $\lambda(e) = 1$, donc $\varphi = \bar{\mu}$, il faut poser $\varphi = 0$ sur ces ensembles pour que $\delta\lambda = \varepsilon\varphi$ soit une variation permise de λ . On n'obtient alors pas l'inégalité DE SCHWARZ (voir (18)), mais une autre inégalité à laquelle, comme on voit aisément, on peut satisfaire en prenant la constante C suffisamment petite.

On peut d'ailleurs montrer en appliquant le théorème d'unicité de l'extrémisation que λ ne peut être égal à 1 pour tous les sous-ensembles de l'ensemble des points de Σ qui sont instables pour F mais réguliers pour Ω (ce sont les ensembles où $\bar{\mu} = 0$ et $\underline{\mu} > 0$) sans que λ soit identiquement égal à 1. De même λ ne peut être 1 pour tous les sous-ensembles de l'ensemble des points stables.

les deux membres ne sont pas égaux, donc l'impossibilité de l'égalité suivante (C une constante):

$$\int_{\Sigma} \frac{d(\lambda \bar{\mu})_Q}{r_{QM}^2} = C \int_{\Sigma} \frac{d(\lambda \mu)_Q}{r_{QM}^2}$$

(M quelconque dans R).

En posant

$$\lambda(e) \bar{\mu}(e) - C \lambda(e) \underline{\mu}(e) = \chi(e)$$

cette relation se réduit à

$$\int_{\Sigma} \frac{d\chi(e_Q)}{r_{PM}^2} = 0$$

($M \supset R$)

En vertu d'un théorème de M. RIESZ ¹⁾, valable aussi pour potentiels non-Newtoniens, ceci n'est possible que si la distribution $\chi(e)$ est identiquement nulle:

$$\begin{aligned} \lambda(e) \bar{\mu}(e) &= C \lambda(e) \underline{\mu}(e), \\ \bar{\mu}(e) &= C \underline{\mu}(e) \end{aligned}$$

On en tire $C=1$ et $\bar{\mu} = \underline{\mu}$ ²⁾. Alors $\varrho = \bar{\mu} = \underline{\mu}$ et la classe des distributions ϱ n'en contient qu'une seule.

Le théorème énoncé est donc montré.

Remarque. Pour ensembles bornés une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{\mu} = \underline{\mu}$ est que l'ensemble des points instables de Σ a la capacité nulle. En effet, dans les points stables Q on a $U(Q) = \lim_{P \rightarrow Q} U(P)$ pour $P \supset CF$; donc $U(Q) = V(Q)$. Alors le théorème d'unicité, mentionné dans § 1, s'applique. Seulement pour ces ensembles ouverts il n'existe donc qu'une seule distribution telle que le potentiel est partout $\equiv V$ et $= V$ sur CF .

§ 5. Application; l'intégrale d'énergie d'une distribution.

Soit S une sphère contenant $\Omega + \Sigma = F$. Appliquons le théorème à l'ensemble CF et supposons que les masses θ sont uniformément réparties sur la surface de S . Le potentiel V de θ est alors égale à une constante à l'intérieur de S ; supposons la $= 1$. Il faut alors considérer l'intégrale

$$F_{\varrho} \equiv \int_{\Sigma} (U_{\varrho} - 2) d\varrho$$

¹⁾ M. RIESZ, Intégrales de RIEMANN-LIOUVILLE et potentiels. Acta de Szeged IX (1938) p. 10.

²⁾ Voir la note p. 9.

On ne considère que des ϱ telles que le potentiel est partout $\equiv 1$ et $= 1$ sur Ω .

F_ϱ atteint son minimum pour une distribution $\underline{\mu}^{(1)}(e)$. Le potentiel correspondant est $= 1$ sur Ω et à peu près partout sur Σ . La masse totale $\underline{\mu}^{(1)}(\Sigma)$ est la capacité de F . Puisque $\underline{\mu}^{(1)}$ ne porte pas de masse sur des ensembles de capacité nulle, on voit que le minimum de F_ϱ est égal à $-\underline{\mu}^{(1)}(\Sigma)^{-1}$. D'après ce que nous avons montré, F_ϱ atteint un maximum pour la distribution $\bar{\mu}^{(1)}(e)$. En général, le potentiel correspondant n'est plus à peu près partout égal à 1 sur Σ , mais seulement dans les points stables de Σ relativement à $C\Omega$. M. BRELOT a prouvé que la masse $\bar{\mu}^{(1)}$ n'est répartie que sur l'ensemble de ces points stables²⁾. On en tire que le maximum de F_ϱ est égal à $-\bar{\mu}^{(1)}(\Sigma)$. Donc

$$\underline{\mu}^{(1)}(\Sigma) \equiv \bar{\mu}^{(1)}(\Sigma)$$

Il est donc impossible de répartir sur Σ une masse totale $> \underline{\mu}^{(1)}(\Sigma)$ ou $< \bar{\mu}^{(1)}(\Sigma)$ tel que le potentiel est partout $\equiv 1$ et $= 1$ sur Ω .

On peut aussi exprimer cette dernière propriété comme il suit. Considérons la classe des distributions ϱ^* de la masse unité sur Σ dont le potentiel est constant dans Ω en ne surpasse nulle part cette constante. Pour toutes ces distributions l'intégrale d'énergie

$$I(\varrho^*, \varrho^*) = \iint_{\Sigma} \frac{d\varrho^*(e_{Q_1}) d\varrho^*(e_{Q_2})}{r_{Q_1 Q_2}} = \int_{\Sigma} U_{\varrho^*} d\varrho^*$$

a un minimum $\frac{1}{\underline{\mu}^{(1)}(\Sigma)}$ et un maximum $\frac{1}{\bar{\mu}^{(1)}(\Sigma)}$ ³⁾.

En effet, la relation entre les distributions ϱ et ϱ^* est

$$\varrho^*(e) = \frac{\varrho(e)}{\varrho(\Sigma)}$$

Alors

$$F_\varrho = \{\varrho(\Sigma)\}^2 \int_{\Sigma} U_{\varrho^*} d\varrho^* - 2\varrho(\Sigma),$$

donc

$$I(\varrho^*, \varrho^*) = \frac{F_\varrho + 2\varrho(\Sigma)}{\{\varrho(\Sigma)\}^2}.$$

¹⁾ Voir: C. DE LA VALLÉE POUSSIN. Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralisé de DIRICHLET. Act. Sci. et Industr. 578, p. 33.

²⁾ Voir: M. BRELOT, Critères de régularité et de stabilité. Bull. Acad. royale de Belgique XXV (1939).

³⁾ L'existence d'un minimum peut s'établir sans aucune restriction concernant les distributions ϱ^* . Evidemment des restrictions sont nécessaires pour qu'il existe un maximum.

On voit alors que le maximum et le minimum de I sont atteints respectivement pour

$$\bar{\mu}^* \equiv \frac{\bar{\mu}^{(1)}}{\bar{\mu}^{(1)}(\Sigma)} \text{ et } \underline{\mu}^* \equiv \frac{\underline{\mu}^{(1)}}{\underline{\mu}^{(1)}(\Sigma)}$$

et ont la valeur mentionnée.

Remarquons que la borne supérieure des potentiels de $\bar{\mu}^*$ et de $\underline{\mu}^*$ est égale à la valeur correspondante de l'intégrale d'énergie. En général, ceci n'est pas vrai pour la borne supérieure $\{\varrho(\Sigma)\}^{-1}$ de U_{ϱ^*} puisque $F_{\varrho} \neq -\varrho(\Sigma)$

§ 6. Extension pour les potentiels non-NEWTONien.

Dans son mémoire cité FROSTMAN a considéré des potentiels plus généraux que celui de NEWTON. Il prend $r^{-\alpha}$ pour le potentiel de la masse unité. On suppose $\alpha < 3$ pour que le potentiel ne soit pas toujours infini à l'intérieur des masses. Enfin on prend $\alpha \geq 1$ pour que le potentiel satisfasse à un principe de maximum analogue à celui de la théorie des fonctions harmoniques. Plus généralement encore, on peut considérer dans un espace euclidien à m dimensions les potentiels élémentaires $r^{\alpha-m}$ avec $0 < \alpha \leq 2$.

Les théorèmes précédents peuvent être généralisés alors sans difficulté. Notons quelques points. Pour capacité d'un ensemble il faut prendre la capacité d'ordre α . Au lieu des fonctions simplement surharmoniques il faut substituer les fonctions „surharmoniques d'ordre α ”¹⁾.

En partant de la distribution $\underline{\mu}$ (dont on montre l'existence, d'après FROSTMAN, par le principe de minimum de GAUSS) on construit la distribution $\bar{\mu}$ au moyen d'une suite décroissante d'ensemble ouverts. Remarquons que la notion „solution généralisée du problème de DIRICHLET” — notion importante dans le cas NEWTONien — n'a aucun sens maintenant. Il faut y substituer une notion nouvelle, introduite par M. RIESZ, la notion de „prolongement d'une fonction donnée sur un ensemble fermé” (RIESZ l.c. p. 27).

Il y a une différence importante avec le cas NEWTONien: les masses de $\underline{\mu}$ et de $\bar{\mu}$ (et donc aussi de ϱ) ne sont pas exclusivement réparties sur Σ . La masse se trouve sur $C\Omega$. Aussi, faut-il parler non plus de balayage ou extrémisation sur Σ , mais de balayage ou extrémisation sur F . Une autre conséquence en est que pour la démonstration de la formule (8), il faut partir d'une fonction continue donnée sur $C\Omega$.

Dordrecht, novembre 1940.

¹⁾ O. FROSTMAN, Sur les fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire. Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 26 A (1939).

Mathematics. — *Ueber die Approximation einer homogenen Linearform an die Null.* Von J. F. KOKSMA und B. MEULENBELD. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

§ 1. *Einleitung.*

I. Bekanntlich besteht ein enger Zusammenhang zwischen der simultanen Approximation des Systems S_n der n reellen Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 1$, fest) mittels rationaler Brüche $\frac{y_1}{x}, \frac{y_2}{x}, \dots, \frac{y_n}{x}$ mit gleichem Nenner $x \geq 1$, und der Approximation der Linearform

$$L_n = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n - y$$

mittels Gitterpunkte (x_1, x_2, \dots, x_n) der Höhe

$$X = \max. (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \geq 1$$

und ganzer rationaler Zahlen y an die Null.

Sei $\varphi(t)$ eine positive Funktion des positiven Arguments t mit $\varphi(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Wir sagen, dass das System S_n die Approximation $\varphi(x)$ zulässt, wenn es unendlich viele Systeme $\frac{y_1}{x}, \frac{y_2}{x}, \dots, \frac{y_n}{x}$ mit

$$\left| a_i - \frac{y_i}{x} \right| < \varphi(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

gibt.

Wir sagen, dass die Form L_n die Approximation $\varphi(X)$ zulässt, wenn es unendlich viele Systeme $(x_1, x_2, \dots, x_n), y$ mit

$$|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n - y| < \varphi(X)$$

gibt.

Bekanntlich liefert das DIRICHLETSche Schubfachprinzip:

Satz 1. Jedes System S_n lässt die Approximation $\frac{1}{x^{1+\frac{1}{n}}}$ zu ($n \geq 1$).

Satz 2. Jede Form L_n lässt die Approximation $\frac{1}{X^n}$ zu ($n \geq 1$).

Es fragt sich, in wie weit sich die obigen Approximationen für jedes System S_n und für jede Form L_n verschärfen lassen. Genauer:

1. Was ist für festes $n \geq 1$ die obere Grenze C_n der Zahlen $C \geq 1$, für die jedes System S_n die Approximation $\frac{1}{Cx^{1+\frac{1}{n}}}$ zulässt?

2. Was ist für festes $n \geq 1$ die obere Grenze c_n der Zahlen $c \geq 1$, für die jede Form L_n die Approximation $\frac{1}{cX^n}$ zulässt?

Diese Fragen fallen im Fall $n = 1$ zusammen und man hat nach A. HURWITZ ¹⁾ $C_1 = c_1 = \sqrt[3]{5}$. Im Fall $n \geq 2$ haben verschiedene Autoren die Zahl C_n abgeschätzt. ²⁾

Von den Abschätzungen nach unten erwähnen wir das MINKOWSKISCHE Ergebnis ³⁾

$$C_n \geq 1 + \frac{1}{n} \quad (n \geq 1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

das von Herrn H. F. BLICHFELDT verschärft wurde zu

$$C_n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left\{1 + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+3}\right\}^{\frac{1}{n}} \quad (n \geq 1). \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Eine Abschätzung nach oben fand Herr O. PERRON ²⁾. Sein Ergebnis wurde von Herrn PH. FURTWÄNGLER ²⁾ verschärft zu:

$$C_n \leq \sqrt[2n]{|D_n|} \quad (n \geq 1),$$

wo D_n die absolut kleinste Körperdiskriminante eines reellen Zahlkörpers $(n+1)$ -ten Grades ist. Hierin ist die Abschätzung

$$C_n \leq \sqrt[2n]{n+1} \sqrt[2]{2(n+1)}$$

enthalten.

So weit uns bekannt ist, wurde die Zahl c_n für $n \geq 2$ nicht untersucht. Der im Anfang erwähnte Zusammenhang der beiden Probleme liefert uns leider bis jetzt kein Mittel um aus den Ergebnissen über C_n nicht-triviale Aussagen über c_n zu gewinnen.

Es stehen zwar die beiden folgenden Sätze zur Verfügung, jedoch reichen diese für unsere Zwecke offenbar nicht aus.

¹⁾ Lit. bei J. F. KOKSMA, Diophantische Approximationen. Berlin, 1936. (Im Folgenden zitiert mit D. A.), Kap. III.

²⁾ D. A., Kap. V.

³⁾ H. MINKOWSKI, Geometrie der Zahlen. Leipzig-Berlin, 1910. S. 108 ff. Siehe auch D. A., Kap. II, V.

⁴⁾ H. F. BLICHFELDT, A new principle in the geometry of numbers, with some applications. Trans. Amer. Math. Soc. 15, S. 227—235 (1914). Siehe auch D. A., Kap. II, V.

Satz 3. Lässt das System S_n die Approximation $\frac{1}{Cx^{1+\frac{1}{n}}}$ zu, so lässt die zugehörige Form L_n die Approximation $\frac{n}{CX^n}$ zu.

Satz 4. Lässt die Form L_n die Approximation $\frac{1}{cX^n}$ zu, so lässt das zugehörige System S_n die Approximation $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{c^{n^2}}x^{1+\frac{1}{n}}}$ zu.

Satz 3 (PERRONScher Uebertragungssatz) ist implizite in einem Beweis von Herrn O. PERRON enthalten²⁾, Satz 4 ist als spezieller Fall im MAHLERSchen Beweis⁵⁾ des KHINTCHINESchen Uebertragungsprinzips enthalten.

II. Sowohl der BLICHFELDTsche Beweis von (2), als der MINKOWSKISCHE Beweis von (1) ist zahlengeometrischer Natur. MINKOWSKI³⁾ benutzt seinen grundlegenden

Satz 5. Ein konvexer Körper K mit Mittelpunkt im Ursprung O des m -dimensionalen Raumes R_m ($m \geq 2$) vom Volumen $V > 2^m$, enthält ausser O noch wenigstens einen Gitterpunkt.

Herr BLICHFELDT⁴⁾ stützt sich auf die folgende von ihm hergeleitete Verallgemeinerung des Satzes 5:

Satz 6. Der Raum R_m der Punkte (u_1, u_2, \dots, u_m) ($m \geq 2$) werde durch die „Ebenen“

$$u_i = a_i + b_i t \quad (i = 1, 2, \dots, m; t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; a_i, b_i \text{ reell, fest})$$

in Fundamentalparallelepiped R eingeteilt. In jedem R seien k ($k \geq 1$) beliebige Punkte fest gegeben. Diese Punkte heissen hier die Gitterpunkte des Raumes. Der Inhalt von R sei W . Ist nun S eine beliebige beschränkte offene stetig zusammenhängende Punktmenge im R_m mit äusserem Volumen V und ist $\varepsilon > 0$, so kann man durch eine passende Translation die Menge S immer in eine solche Lage bringen, dass die Anzahl der Gitterpunkte, welche innerhalb von S oder innerhalb einer ε -Umgebung eines Randpunktes von S liegen, grösser als $\frac{V k}{W}$ ist.

Obwohl nun, wie gesagt, uns ein Uebertragungssatz, der es ermöglicht die Ergebnisse für C_n direkt in solche für c_n überzuführen, nicht bekannt ist, bemerken wir, dass man bei diesen zahlengeometrischen Beweismethoden den Zusammenhang zwischen Form und Zahlensystem ausnutzen kann, indem man den folgenden an sich trivialen Hilfssatz anwendet, der es erlaubt die beim Problem der Form auftretenden Volumenbe-

⁵⁾ K. MAHLER, Neuer Beweis eines Satzes von A. KHINTCHINE, Rec. Math. Moskow (1) 43, S. 961—962 (1936). Weitere Lit. in D. A., Kap. V.

rechnungen sofort auf die analogen beim Problem des Zahlensystems auftretenden Volumenberechnungen zurückzuführen und umgekehrt.

Hilfssatz 1. *Im Raum R_{n+1} der Punkte $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ sei eine Punktmenge M vom Volumen V gegeben. Durch die Substitution*

$$\begin{aligned}\beta_i (\alpha_i u_{n+1} - u_i) &= x_i & (i=1, 2, \dots, n) \\ \beta_{n+1} u_{n+1} &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n - x_{n+1},\end{aligned}$$

wo die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ reelle Zahlen und die Zahlen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$ reelle Zahlen $\neq 0$ bedeuten, wird M in eine Punktmenge M' des Raumes R'_{n+1} der Punkte $(u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$ vom Volumen

$$V' = \frac{V}{|\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{n+1}|}$$

übergeführt.

Beweis. Durch Auflösung nach den x_i kann man die Transformation folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned}x_i &= \beta_i \alpha_i u_{n+1} - \beta_i u_i & (i=1, 2, \dots, n) \\ x_{n+1} &= (\beta_1 \alpha_1^2 + \beta_2 \alpha_2^2 + \dots + \beta_n \alpha_n^2 - \beta_{n+1}) u_{n+1} \\ &\quad - (\beta_1 \alpha_1 u_1 + \beta_2 \alpha_2 u_2 + \dots + \beta_n \alpha_n u_n).\end{aligned}$$

Weil die zugehörige Determinante den Absolutwert $|\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{n+1}|$ hat, folgt sofort

$$\begin{aligned}V &= \iint \dots \int_{(M)} dx_1 dx_2 \dots dx_{n+1} = \\ &= |\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{n+1}| \iint \dots \int_{(M')} du_1 du_2 \dots du_{n+1} = |\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{n+1}| V'.\end{aligned}$$

III. In § 2 wird unter Benutzung dieses Hilfssatzes in wenigen Zeilen dem MINKOWSKISchen Ergebnis (1) das Analogon

$$c_n \cong \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \quad (3)$$

zur Seite gestellt.

Es lässt sich aber auch ein Analogon zum BLICHFELDTschen Ergebnis (2) herleiten und zwar gilt:

$$c_n \cong q_n, \text{ wo } q_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left\{1 + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+3}\right\} \cdot \dots \cdot \dots \quad (4)$$

Die Ungleichung (4) ist enthalten im folgenden Satz 7, dessen Beweis (mit der BLICHFELDTschen Methode) das Ziel dieser Note ausmacht (§ 3).

Satz 7. *Es sei für ganzes $n \geq 1$ die Zahl q_n durch (4) definiert. Sind dann $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ irgend n reelle Zahlen, und t eine beliebige Zahl > 2 , so kann man immer ganze rationale Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n, y mit*

$$1 \cong X = \max. (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \cong \frac{2 t^{\frac{1}{n}}}{q_n^{\frac{1}{n}}} \cdot \dots \cdot \dots \quad (5)$$

finden, so dass die Linearform

$$L = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n - y$$

den Ungleichungen

$$|L| \leq \frac{1}{\varrho_n X^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und

$$|L| \leq \frac{2}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

genügt.

Bemerkungen. 1. Es genügt den Satz zu zeigen mit

$$1 \leq X < \frac{t^{\frac{1}{n}}}{\varrho_n^{1/n}} (2 + \delta), \quad |L| < \frac{(1 + \delta)^n}{\varrho_n X^n}, \quad |L| < \frac{2 + \delta}{t}$$

(δ beliebig, positiv), statt mit (5), (6), (7), denn weil diesen Ungleichungen höchstens endlich viele Gitterpunkte $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ genügen können, folgt aus Stetigkeitsgründen sofort der Satz.

2. Wir werden statt (5) und (6) sogar

$$1 \leq X \leq \frac{2 t^{\frac{1}{n}}}{\gamma_n^{\frac{1}{n}}} \quad |L| \leq \frac{1}{\gamma_n X^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

mit

$$\gamma_n = \left\{ \left(\frac{n+1}{n} \right)^n - \frac{(n-1)^{n+1}}{n^n (n+1)} + 2^{n+1} n \int_0^{1-\frac{2}{n+1}} \frac{v^n}{(1+v)^{n+1}} dv \right\} \quad . \quad . \quad (9)$$

beweisen. Abschätzung des Integrals in (9)⁴⁾ liefert dann die Ungleichung

$$\gamma_n \geq \varrho_n.$$

3. Aus Satz 7 folgt, dass es zu jedem $t > 2$ einen Gitterpunkt $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ mit (5), (6) und (7) gibt. Ist nun L eine eigentliche Form, also stets $L \neq 0$, so kann bei unbeschränkt wachsendem t jener Gitterpunkt nicht immer derselbe sein, wie man sofort aus (7) ersieht. Vielmehr muss X mit t unbeschränkt wachsen, so dass es also unendlich viele Lösungen $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ der Ungleichung (6) gibt.

Im Fall, dass L uneigentlich ist, ist die letzte Aussage trivial, denn mit $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ ist für ganzes p offenbar auch $(px_1, px_2, \dots, px_n, py)$ eine Lösung von (6).

§ 2. Beweis der Ungleichung (3).

Wir betrachten im Raum der Punkte $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ den durch die Ungleichungen

$$\left. \begin{aligned} |x_i + L t| &\leq 1 \\ |x_i - L t| &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

definierten konvexen Körper M , dessen Mittelpunkt in O liegt. Dabei ist

$$L = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n - y$$

und $t > 2$ gesetzt worden.

Das Volumen von M sei V . Nach Hilfssatz 1 (mit $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = -1$, und $\beta_{n+1} = 1$ angewandt) ist das Volumen V' des Körpers M' :

$$\left. \begin{aligned} |u_i - a_i v + v t| &\leq 1 \\ |u_i - a_i v - v t| &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

der durch die Transformation

$$\begin{aligned} -a_i v + u_i &= x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ v &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n - y \end{aligned}$$

aus M entsteht, gleich V . Das Volumen V' wurde aber von MINKOWSKI³⁾ auf $\frac{2^{n+1}}{(n+1)t}$ berechnet. Dehnen wir jetzt M im Verhältnis $(t(n+1))^{\frac{1}{n+1}} : 1$

aus, so hat nach der Dilatation der Körper den Volumen 2^{n+1} , enthält also nach Satz 5 wenigstens einen Gitterpunkt ausser O . Es gibt also einen Gitterpunkt $(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \neq (0, 0, \dots, 0)$ mit

$$|x_i| + |L| t \leq \sqrt[n+1]{t(n+1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

Es ist klar, dass dabei $X = \max. (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \geq 1$ ist, denn sonst wäre $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, $|y| \geq 1$, also

$$|L| t + |x_i| = |y| t \geq t,$$

was der Ungleichung

$$|L| t + |x_i| \leq \sqrt[n+1]{t(n+1)} \leq \sqrt[n+1]{t 2^n} < \sqrt[n+1]{t^{n+1}} = t$$

widerspricht. Wegen (10) gilt also jedenfalls

$$1 \leq X \leq \sqrt[n+1]{t(n+1)}. \quad (11)$$

Weil das geometrische Mittel von $n+1$ reellen Zahlen höchstens gleich

dem arithmetischen Mittel ist, gilt für beliebiges i ($1 \leq i \leq n$)

$$\{n|L|t \cdot |x_i|^n\}^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{n|L|t + n|x_i|}{n+1} \leq \frac{n t^{\frac{1}{n+1}} (n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{n+1}$$

wegen (10), d.h.

$$|L|X^n \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n,$$

also

$$|L| \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n X^n} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (12)$$

Wir haben also bei jedem $t > 2$ eine Lösung $(x_1, x_2, \dots, x_n), y$ von (10), (11), (12). Auf ähnliche Weise wie in Bemerkung 2 beim Satz 7 angegeben wurde, schliesst man dann, dass es unendlich viele Lösungen von (12) (mit $X \rightarrow \infty$) gibt.

§ 3. Beweis des Satzes 7.

Wir bilden den Raum R_{n+1} der Punkte $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ auf den Raum R'_{n+1} der Punkte $(w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1})$ durch die Transformation

$$w_i = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad w_{n+1} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n - y \quad (13)$$

ab. Im R'_{n+1} betrachten wir die Fundamentalparallelepiped R , welche von den Ebenen

$$w_i = a_i + h_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad w_{n+1} = \frac{1}{2} + k h_{n+1}$$

begrenzt werden; hierin ist k eine vorgegebene natürliche Zahl, sind a_1, a_2, \dots, a_n irgend n vorgegebene nicht-ganzrationalzahlige Werte, und durchlaufen h_1, h_2, \dots, h_{n+1} unabhängig von einander alle ganzen rationalen Zahlen. Jedes der Fundamentalparallelepipede R hat offenbar das Volumen k .

Setzt man in (13) für $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ sämtliche Gitterpunkte des R_{n+1} ein, so erhält man im R'_{n+1} ein System von Punkten $(w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1})$, die wir als Gitterpunkte des R'_{n+1} im Sinne des BLICHFELDTschen Satzes 6 auffassen wollen. Jedes unserer Fundamentalparallelepipede R enthält genau k dieser Gitterpunkte, denn es gibt genau k Systeme von ganzen rationalen Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n, y , welche bei festen h_i den Ungleichungen

$$a_i + h_i < x_i < a_i + h_i + 1 \quad (1, 2, \dots, n),$$

$$\frac{1}{2} + k h_{n+1} < a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n - y < \frac{1}{2} + k (h_{n+1} + 1)$$

genügen. Sei jetzt im R_{n+1} der Körper S durch die Ungleichungen

$$\left. \begin{aligned} |L| &< \frac{1}{t} \\ \left| \frac{x_i}{a} \right| + \left| \frac{2^{n+1} n^n L t}{(n+1)^{n+1}} \right| &< 1 \quad \text{für} \quad |L t| \leq \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n \\ |L t| \left(\left| \frac{x_i}{a} \right| + 1 \right)^n &< 1 \quad \text{für} \quad \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n < |L t| < 1 \end{aligned} \right\} (i=1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

definiert; hierin ist

$$L = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n - y$$

und zur Abkürzung

$$a = \left(\frac{t}{\gamma_n} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (15)$$

gesetzt worden. Das Volumen des Körpers S sei V . Durch die Transformation

$$\begin{aligned} at(-a_i v + u_i) &= x_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ v &= at(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n - y) \end{aligned}$$

entsteht aus S der Körper S' :

$$\left. \begin{aligned} |v| &< a \\ |t(u_i - a_i v)| + \left| \frac{2^{n+1} n^n v}{(n+1)^{n+1} a} \right| &< 1 \quad \text{für} \quad \left| \frac{v}{a} \right| \leq \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n \\ \left| \frac{v}{a} \right| \{t|u_i - a_i v| + 1\}^n &< 1 \quad \text{für} \quad \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n < \left| \frac{v}{a} \right| < 1 \end{aligned} \right\} (i=1, 2, \dots, n)$$

mit dem Volumen V' . Nach Hilfssatz 1 mit

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = -at \quad \text{und} \quad \beta_{n+1} = \frac{1}{at}$$

gilt

$$V' = \frac{V}{(at)^{n-1}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (16)$$

Das Volumen des Körpers S' wurde aber von Herrn BLICHFELDT⁴⁾ auf

$$V' = \frac{a \gamma_n}{t^n} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (17)$$

berechnet. Aus (16) und (17) folgt wegen (15) sofort

$$V = 1.$$

Wenn man nun mittels (13) den Raum R_{n+1} auf den Raum R''_{n+1} abbildet, hat der Bildkörper S'' von S ebenfalls das Volumen 1. Nach Satz 6 gibt es nun bei vorgegebenem positivem ε im Raum R''_{n+1} eine Translation

$$z_i = w_i + d_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \dots \quad (18)$$

durch die der Körper S'' in eine solche Lage versetzt wird, dass wenigstens zwei verschiedene Gitterpunkte $(z'_1, z'_2, \dots, z'_{n+1})$, $(z''_1, z''_2, \dots, z''_{n+1})$ des R''_{n+1} zu S'' oder doch zu ε -Umgebungen von Randpunkten von S'' gehören. Die diesen Gitterpunkten vermöge (18) entsprechenden Punkte seien mit $(w'_1, w'_2, \dots, w'_{n+1})$, $(w''_1, w''_2, \dots, w''_{n+1})$ angedeutet und die ihnen vermöge (13) entsprechenden Gitterpunkte des R_{n+1} mit $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, y')$, $(x''_1, x''_2, \dots, x''_n, y'')$; schliesslich seien die diesen letzten Gitterpunkten entsprechenden Werte der Form L mit L' , bzw. L'' bezeichnet. Dann ist offenbar

$$w'_{n+1} - w''_{n+1} = z'_{n+1} - z''_{n+1} = L' - L''. \quad \dots \quad (19)$$

Wir nehmen jetzt die in Bemerkung 1 beim Satz 7 genannte Zahl $\delta > 0$ beliebig, aber ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\leq \frac{1}{2}$ an, und wir wählen ein positives ε' mit

$$\left. \begin{aligned} 2(1 + \varepsilon') < t \text{ und } \varepsilon' < \frac{1}{100} \delta, \text{ also mit} \\ 1 < \left(\frac{1 + \varepsilon'}{1 - \varepsilon'} \right)^{\frac{1}{n}} \equiv \frac{1 + \varepsilon'}{1 - \varepsilon'} < 1 + 3\varepsilon' \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Dann ist in der obigen Aussage, wo man offenbar $\varepsilon = \varepsilon' > 0$ nur hinreichend klein zu wählen hat, folgendes enthalten:

$$|w'_{n+1}| < \frac{1 + \varepsilon'}{t} \quad , \quad |w''_{n+1}| < \frac{1 + \varepsilon'}{t} \quad \dots \quad (21)$$

und entweder

$$\left| \frac{w'_i}{a} \right| + \left| \frac{2^{n+1} n^n w'_{n+1} t}{(n+1)^{n+1}} \right| < 1 + \varepsilon' \text{ mit } |w'_{n+1} t| < \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n (1 + \varepsilon'), \quad (22)$$

oder

$$|w'_{n+1} t| \left(\left| \frac{w'_i}{a} \right| + 1 \right)^n < 1 + \varepsilon' \text{ mit } \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n (1 - \varepsilon') < |w'_{n+1} t| < 1 + \varepsilon', \quad (23)$$

sowie entweder

$$\left| \frac{w''_i}{a} \right| + \left| \frac{2^{n+1} n^n w''_{n+1} t}{(n+1)^{n+1}} \right| < 1 + \varepsilon' \text{ mit } |w''_{n+1} t| < \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n (1 + \varepsilon'), \quad (24)$$

oder

$$|w''_{n+1} t| \left(\left| \frac{w''_i}{a} \right| + 1 \right)^n < 1 + \varepsilon' \text{ mit } \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n (1 - \varepsilon') < |w''_{n+1} t| < 1 + \varepsilon'. \quad (25)$$

Wir behaupten nun zunächst, dass es unmöglich ist, dass

$$x'_i = x''_i \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n$$

gelten würde. Denn dann wäre auch wegen (13)

$$z'_i = z''_i \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n,$$

und also $z'_{n+1} \neq z''_{n+1}$, d.h. wegen (19) und $x'_i = x''_i$

$$|L' - L''| = |y' - y''| \neq 0 \text{ und also } \cong 1,$$

was der aus (21) und (19) folgenden Ungleichung

$$|L' - L''| < \frac{2(1 + \varepsilon')}{t}$$

wegen (20) widerspricht.

Wir setzen jetzt

$$X_i = x'_i - x''_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad Y = y' - y'', \quad L = L' - L'';$$

es ist dann $(X_1, X_2, \dots, X_n, Y)$ ein Gitterpunkt des R_{n+1} mit

$$X = \max. (|X_1|, |X_2|, \dots, |X_n|) \cong 1$$

und nach (13) und (19) gilt:

$$X_i = w'_i - w''_i, \quad L = w'_{n+1} - w''_{n+1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Wir zeigen jetzt die 3 Ungleichungen

$$|L| < \frac{2 + \delta}{t}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

$$X < (2 + \delta) a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

$$X |L|^{\frac{1}{n}} < \frac{a}{t^{\frac{1}{n}}} (1 + \delta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Es folgt (27) wegen (26) sofort aus (21), weil wegen (20) $2\varepsilon' < \delta$ ist.

Zum Beweise von (28) und (29) unterscheiden wir drei Fälle.

Fall 1. Es mögen (22) und (24) gelten. Subtraktion liefert wegen (26) für $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\left| \frac{X_i}{a} \right| + \left| \frac{2^{n+1} n^n L t}{(n+1)^{n+1}} \right| < 2 + 2\varepsilon' < 2 + \delta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

also erst recht (28).

Weil ferner das geometrische Mittel von $n+1$ absoluten Beträgen höchstens gleich ihrem arithmetischen Mittel ist, hat man für $i=1, 2, \dots, n$

$$\left| \frac{X_i}{a} \right|^n \left| \frac{2^{n+1} n^{n+1} L t}{(n+1)^{n+1}} \right| \leq \left\{ \frac{n \left| \frac{X_i}{a} \right| + \left| \frac{2^{n+1} n^{n+1} L t}{(n+1)^{n+1}} \right|}{n+1} \right\}^{n+1}$$

Weil nach (30) die rechte Seite dieser Ungleichung höchstens gleich

$$\left(\frac{n}{n+1} (2+2\varepsilon') \right)^{n+1}$$

ist, haben wir also für $i=1, 2, \dots, n$

$$\left| \frac{X_i}{a} \right|^n |L t| \leq (1+\varepsilon')^{n+1} < (1+3\varepsilon')^{\frac{n+1}{2}} < (1+\delta)^n$$

wegen (20), womit auch (29) gezeigt worden ist.

Fall 2. Es mögen (22) und (25) gelten⁶⁾. Also ist

$$\left| \frac{w'_i}{a} \right| < 1 - \left| \frac{2^{n+1} n^n w'_{n+1} t}{(n+1)^{n+1}} \right| + \varepsilon'; \quad \left| \frac{w''_i}{a} \right| < -1 + \left| \frac{1+\varepsilon'}{w''_{n+1} t} \right|^{\frac{1}{n}},$$

d.h. wegen (26):

$$\left| \frac{X_i}{a} \right| < \left| \frac{1+\varepsilon'}{w'_{n+1} t} \right|^{\frac{1}{n}} - \left| \frac{2^{n+1} n^n w'_{n+1} t}{(n+1)^{n+1}} \right| + \varepsilon' \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (31)$$

Aus (31) folgt wegen (25) sogleich

$$\left| \frac{X_i}{a} \right| < \left(\frac{2n}{n+1} \right) \left(\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'} \right)^{\frac{1}{n}} + \varepsilon' < 2+7\varepsilon' < 2+\delta$$

wegen (20); daher gilt (28).

Wir setzen nun

$$|w'_{n+1} t| = p \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n (1+\varepsilon'); \quad |w''_{n+1} t| = q \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n (1-\varepsilon'),$$

so dass wegen (22) und (25)

$$0 \leq p < 1, \quad 1 < q < \frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'} \left(\frac{2n}{n+1} \right)^n < 2^{n+1}. \quad \dots \quad (32)$$

(siehe (20)), und ferner wegen (26)

$$|L t| \leq (p+q) \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n (1+\varepsilon') \dots \quad (33)$$

⁶⁾ Der Fall, dass (23) und (24) gelten führt man durch Vertauschung von $(w'_1, w'_2, \dots, w'_{n+1})$ und $(w'_1, w'_2, \dots, w'_{n+1})$ auf den Fall 2 zurück.

ist. Wir können für (31) dann schreiben ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\left| \frac{X_i}{a} \right| < \frac{2n}{(n+1)q^{\frac{1}{n}}} \left(\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'} \right)^{\frac{1}{n}} - \frac{2p}{n+1} (1+\varepsilon') + \varepsilon' < \left. \begin{aligned} & < \frac{2n}{(n+1)q^{\frac{1}{n}}} - \frac{2p}{n+1} + 7\varepsilon' \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

wegen $q > 1$ und (20). Wegen

$$\frac{1}{q^{\frac{1}{n}}} - \frac{1}{(p+q)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{p}{nq^{1+\frac{1}{n}}}$$

(Mittelwertsatz) hat man

$$\frac{2n}{(n+1)q^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{2p}{(n+1)q^{1+\frac{1}{n}}} + \frac{2n}{(n+1)(p+q)^{\frac{1}{n}}} < \frac{2p}{n+1} + \frac{2n}{(n+1)(p+q)^{\frac{1}{n}}}$$

(man beachte $q > 1$), daher

$$\frac{2n}{(n+1)q^{\frac{1}{n}}} - \frac{2p}{n+1} < \frac{2n}{(n+1)(p+q)^{\frac{1}{n}}}.$$

Aus (34) geht also hervor

$$\left| L^{\frac{1}{n}\frac{1}{t^n}} \frac{X_i}{a} \right| < \frac{2n |L|^{\frac{1}{n}\frac{1}{t^n}}}{(n+1)(p+q)^{\frac{1}{n}}} + 7 |L|^{\frac{1}{n}\frac{1}{t^n}} \varepsilon' \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

also wegen (33)

$$\left| L^{\frac{1}{n}\frac{1}{t^n}} \frac{X}{a} \right| < (1+\varepsilon')^{\frac{1}{n}} + 7(p+q)^{\frac{1}{n}} \frac{n+1}{2n} (1+\varepsilon')^{\frac{1}{n}} \varepsilon'$$

also wegen (32)

$$< 1 + \varepsilon' + 7 \cdot 8 \cdot (1+\varepsilon') \varepsilon' < 1 + \delta$$

(wegen (20)), so dass auch (29) gezeigt worden ist.

Fall 3. Es mögen (23) und (25) gelten. Dann ist also

$$\left| \frac{w'_i}{a} \right| < \left| \frac{1+\varepsilon'}{w'_{n+1}t} \right|^{\frac{1}{n}} - 1; \quad \left| \frac{w''_i}{a} \right| < \left| \frac{1+\varepsilon'}{w''_{n+1}t} \right|^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

so dass wegen (26) gilt

$$\left| \frac{X_i}{a} \right| < \left(\left| \frac{1}{w'_{n+1}t} \right|^{\frac{1}{n}} + \left| \frac{1}{w''_{n+1}t} \right|^{\frac{1}{n}} \right) (1+\varepsilon')^{\frac{1}{n}} - 2 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (35)$$

Aus (35) folgt sofort wegen (23) und (25)

$$\left| \frac{X}{a} \right| < \frac{4n}{n+1} \left(\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'} \right)^{\frac{1}{n}} - 2 < 2 + 12\varepsilon' < 2 + \delta$$

wegen (20)), so dass (28) schon gezeigt ist. Wir setzen jetzt (siehe (23) (und (25))

$$\left. \begin{aligned} |w'_{n+1} t| &= p_1 \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n (1-\varepsilon'), \\ |w''_{n+1} t| &= q_1 \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n (1-\varepsilon') \text{ mit } p_1 > 1, q_1 > 1, p_1 \equiv q_1 \end{aligned} \right\} \dots (36)$$

(die letzte Ungleichung kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden). Aus (36) und (26) folgt dann sofort

$$0 < |Lt| \equiv (p_1 + q_1) \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n (1-\varepsilon') \dots (37)$$

und aus (36) und (35)

$$\left| \frac{X_i}{a} \right| < \left(\frac{1}{p_1^n} + \frac{1}{q_1^n} \right) \left(\frac{2n}{n+1} \right) \left(\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'} \right)^{\frac{1}{n}} - 2 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (38)$$

Wegen (26) folgt aus (23) und (25) noch

$$0 < |Lt| < 2 + 2\varepsilon' < 3. \dots (39)$$

Nach dem Mittelwertsatz haben wir

$$\frac{1}{p_1^n} - \frac{1}{(p_1 + q_1)^n} \equiv \frac{q_1}{n p_1^{1+\frac{1}{n}}} \equiv \frac{1}{n q_1^n}$$

(wegen $p_1 \equiv q_1$) und also wegen $q_1 > 1$ und (37)

$$\frac{1}{p_1^n} + \frac{1}{q_1^n} \equiv \frac{1}{(p_1 + q_1)^n} + \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{q_1^n} < \frac{1}{|Lt|^{\frac{1}{n}}} \left(\frac{n+1}{2n} \right) (1-\varepsilon')^{\frac{1}{n}} + \frac{n+1}{n},$$

so dass aus (38) hervorgeht

$$\frac{X}{a} < \frac{1}{|Lt|^{\frac{1}{n}}} (1 + \varepsilon')^{\frac{1}{n}} + 2 \left(\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'} \right)^{\frac{1}{n}} - 2 < \frac{1}{|Lt|^{\frac{1}{n}}} (1 + \delta),$$

wegen (20) und (39). Es ist also (29) auch in diesem Fall bewiesen.

Wir haben nun bei beliebigem positivem δ die Existenz eines Gitterpunktes $(X_1, X_2, \dots, X_n, Y)$ mit $X \equiv 1$, (27), (28) und (29) gezeigt, und damit nach der Bemerkung 1 bei Satz 7 die Richtigkeit dieses Satzes.

Mathematics. — *Ueber die Diskrepanz (mod 1) und die ganzzahligen Lösungen gewisser Ungleichungen.* Von J. F. KOKSMA. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

1. Es bedeute U ein System von $N \geq 1$ reellen Zahlen $f(1), f(2), \dots, f(N)$ und α, β ein Paar reeller Zahlen mit

$$\alpha \leq \beta \leq \alpha + 1. \dots \dots \dots (1)$$

Sei $A(\alpha, \beta)$ die Anzahl derjenigen der $f(x)$, für die die Diophantische Ungleichung

$$\alpha \leq f(x) < \beta \pmod{1}$$

gilt, d.h., für die bei irgend einem ganzen y gilt

$$\alpha \leq f(x) - y < \beta.$$

Man nennt die Zahl

$$R = R(\alpha, \beta) = A(\alpha, \beta) - (\beta - \alpha) N. \dots \dots \dots (2)$$

das Fehlerglied (für das Intervall $\alpha \leq u < \beta$) in der Gleichverteilung (mod 1) des Systems U und die obere Grenze D der Zahlen $\frac{|R|}{N}$, wenn (α, β) die Menge aller Zahlenpaare mit (1) durchläuft, heisst die **Diskrepanz (mod 1)** des Systems U . Offenbar ist

$$\frac{1}{N} \leq D \leq 1.$$

Aus der Definition von D geht nun hervor, dass in jedem Intervall $\alpha < u < \beta$ der Länge $\beta - \alpha > D$ wenigstens eine der Zahlen $f(x) \pmod{1}$ liegt, d.h.: ist $H > D$, so hat das System

$$\alpha < f(x) < \alpha + H \pmod{1}, \quad 1 \leq x \leq N,$$

und auch das System

$$\alpha - H < f(x) < \alpha \pmod{1}, \quad 1 \leq x \leq N$$

wenigstens eine ganzzahlige Lösung x .

Wir betrachten jetzt eine unendliche Folge reeller Zahlen $f(1), f(2), \dots$, und deuten mit $D(N)$ die Diskrepanz (mod 1) des Systems der ersten N Zahlen $f(1), f(2), \dots, f(N)$ dieser Folge an. Ist dann $H(N) > D(N)$ für $N = 1, 2, \dots$, und strebt $H(N)$ mit unbeschränkt wachsendem N monoton gegen Null, so hat nach dem vorangehenden jedes der beiden Systeme

$$\begin{aligned} a < f(x) < a + H(x) & \pmod{1} \\ a - H(x) < f(x) < a & \pmod{1} \end{aligned}$$

unendlich viele verschiedene ganzzahlige Lösungen x , und also erst recht auch die Diophantische Ungleichung

$$a - H(x) < f(x) < a + H(x) \pmod{1}, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

auf die wir uns beschränken wollen.

Es ist für die Theorie der Diophantischen Ungleichungen deshalb sehr wichtig, bei einer gegebenen Folge $f(1), f(2), \dots$ scharfe Abschätzungen nach oben für die Diskrepanz (mod 1) $D(N)$ herleiten zu können.

Es gelingt nun manchmal, die Untersuchung der Verteilung (mod 1) des im Anfang erwähnten Systems U auf die Betrachtung des zugehörigen System U^* der N^2 Differenzen $f(x) - f(z)$ ($x, z = 1, 2, \dots, N$) zurückzuführen. Dieser Kunstgriff wurde wohl zuerst von Herrn H. WEYL benutzt und nachher von mehreren Autoren angewandt¹⁾.

So zeigten die Herren J. G. VAN DER CORPUT und CH. PISOT²⁾ die folgende Ungleichung, die eine Verschärfung eines Vinogradoffschen Satzes darstellt, und in der D die Diskrepanz eines beliebigen Systems U , D^* die Diskrepanz des zugehörigen Systems U^* bedeutet:

$$D \leq 2^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{|\log D^*|}{\log 2}}} \sqrt{D^*}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

sie zeigten überdies, dass in (4) enthalten ist:

$$D \leq 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4\varepsilon}} D^{*\frac{1}{4} - \varepsilon} \quad (\varepsilon > 0, \text{ beliebig}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Der Leser zeigt ferner ohne Mühe:

$$\frac{1}{N} \leq D^* \leq D \quad (N = \text{Anzahl der Zahlen von } U). \quad . \quad . \quad (6)$$

¹⁾ Lit. in meinem Bericht „Diophantische Approximationen“ (Erg. der Math. IV, 4), Berlin 1936, Kap. VIII—X.

²⁾ J. G. VAN DER CORPUT et CH. PISOT, Sur la discr pance modulo un. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 42, 476—486, 554—565, 713—722 (1939). Indag. Math. I, 143—153, 184—195, 260—269 (1939).

Entsprechend (2) bedeute in der Folge

$$R^* = R^*(\alpha, \beta) = A^*(\alpha, \beta) - (\beta - \alpha) N^2 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

das Fehlerglied in der Gleichverteilung des Systems U^* .

Wir kehren jetzt zu unsrer Folge $f(1), f(2), \dots$ zurück und deuten die Diskrepanz (mod 1) des zum System $U(N)$ gehörigen Systems $U^*(N)$ der N^2 Zahlen $f(x) - f(z)$ ($x, z = 1, 2, \dots, N$) für $N = 1, 2, \dots$ mit $D^*(N)$ an. Strebt $D^*(N)$ mit unbeschränkt wachsendem N gegen Null, so liefert die Ungleichung (4) (oder (5)) ein in (3) brauchbares $H(x)$, dessen Grössenordnung ungefähr derjenigen der Funktion $\sqrt{D^*(x)}$ gleichkommt. Dieses Ergebnis ist um so wichtiger, weil es Folgen $f(1), f(2), \dots$ gibt, für die man bei dem heutigen Stand der Theorie auf keinem andren Wege Nicht-triviales über die Ungleichung (3) auszusagen weiss.

Es wird hier der folgende Satz gezeigt:

Satz 1. *Ist $f(1), f(2), \dots$ eine beliebige Folge reeller Zahlen, $D^*(N)$ die Diskrepanz (mod 1) der N^2 Zahlen $f(x) - f(z)$ ($x, z = 1, 2, \dots, N$), und bedeutet $\phi(N)$ eine mit N (beliebig langsam) unbeschränkt ins Unendliche wachsende Funktion des ganzzahligen Arguments $N \geq 1$, so gibt es zu fast allen reellen α in jeder unendlichen Folge aufsteigender natürlicher Zahlen eine unendliche Teilfolge von Zahlen $N = N_1, N_2, \dots$, für die die Anzahl $A(\alpha, N)$ der ganzzahligen Lösungen des Ungleichungssystems*

$$\alpha - D^*(N) \phi(N) \equiv f(x) < \alpha + D^*(N) \phi(N) \pmod{1} \quad (1 \equiv x \equiv N) \quad (8)$$

den Ungleichungen

$$ND^*(N) \phi(N) < A(\alpha, N) < 3ND^*(N) \phi(N) \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

genügt.

Bemerkungen. 1. Der Ausdruck „fast alle“ bedeutet, dass die Menge der Ausnahme-Zahlen α das Lebesguesche Mass Null hat.

2. Wegen (6) gilt $ND^*(N) \geq 1$ für $N \geq 1$, also wegen (9) und $\phi(N) \rightarrow \infty$ für $N \rightarrow \infty$:

$$A(\alpha, N) \rightarrow \infty \quad \text{für } N \rightarrow \infty;$$

gibt es eine monoton mit wachsendem N nach Null strebende Funktion $H(N) > D^*(N) \phi(N)$, so hat das Ungleichungssystem (3) also für fast alle α unendlich viele ganze Lösungen x . Bedeutet die Hinzufügung „fast“ eine erhebliche Verschlechterung des vorher besprochenen Ergebnisses, andererseits bemerke ich, dass $H(x)$ jetzt ungefähr von der Grössenordnung der Funktion $D^*(x)$ ist, was einen Fortschritt ausmacht.

Ich zeige zunächst, dass Satz 1 im folgenden Satz 2 enthalten ist und zeige alsdann Satz 2.

Satz 2. Sei N eine natürliche Zahl, $f(1), f(2), \dots, f(N)$ ein System von N reellen Zahlen, D^* die Diskrepanz (mod 1) des zugehörigen Systems der N^2 Zahlen $f(x) - f(z)$ ($x, z = 1, 2, \dots, N$) und ϕ eine positive Zahl. Es bedeute M die Menge sämtlicher α aus $0 \leq \alpha \leq 1$, für die die Anzahl $A(\alpha)$ der ganzen Lösungen x der Diophantischen Ungleichung

$$\alpha - D^* \phi \equiv f(x) < \alpha + D^* \phi \pmod{1} \quad (1 \leq x \leq N) \quad . \quad . \quad (10)$$

nicht den Ungleichungen

$$ND^* \phi < A(\alpha) < 3ND^* \phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

genügt. Dann gilt für das Lebesguesche Mass mM der Menge M :

$$mM \leq 2\phi^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Beweis des Satzes 1 aus Satz 2. Die Grössen des Satzes 1 erfüllen für $N = 1, 2, \dots$ die Voraussetzungen des Satzes 2. Ich wähle eine Folge aufsteigender natürlicher Zahlen n_1, n_2, \dots , so dass die Reihe $(\phi(n_1))^{-1} + (\phi(n_2))^{-1} + \dots$ konvergiert. Die Menge der α aus $0 \leq \alpha \leq 1$, für die (9) nicht gilt, sei mit $M(N)$ angedeutet. Dann ist die Menge aller α aus $0 \leq \alpha \leq 1$, für die (9) für höchstens endlich viele Zahlen N der Folge n_1, n_2, \dots erfüllt ist, für jeden Index ν_0 in der Menge $M(n_{\nu_0}) + M(n_{\nu_0+1}) + \dots$ enthalten, hat also wegen Satz 2 ein Mass $\leq 2(\phi(n_{\nu_0}))^{-1} + 2(\phi(n_{\nu_0+1}))^{-1} + \dots$, d.h., wegen der Konvergenz der Reihe $(\phi(n_1))^{-1} + (\phi(n_2))^{-1} + \dots$, hat das Mass Null. Q.e.d.

3. Zum Beweise des Satzes 2 zeige ich den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz. Ist $f(1), f(2), \dots, f(N)$ ein System von $N \geq 1$ reellen Zahlen, und bedeuten, für reelle α, β mit (1), $R(\alpha, \beta)$ und $R^*(\alpha, \beta)$ die zugehörigen durch (2) und (7) definierten Fehlerglieder, so gilt für jedes t ($0 \leq t \leq \frac{1}{4}$) die Gleichheit

$$\int_0^1 R^2(\alpha - t, \alpha + t) d\alpha = \int_0^{2t} R^*(-\alpha, \alpha) d\alpha.$$

Bemerkung. Diese Identität ist nicht neu, in ihrer obenerwähnten Arbeit bemerken die Herren VAN DER CORPUT und PISOT, dass sie durch Limesübergang aus einer Vinogradoffschen Identität (in der keine Integrale, sondern endliche Summen auftreten) folgt³⁾. Ich gebe hier einen direkten

³⁾ S. 478 (bzw. S. 145) der unter 2) zitierten Arbeit.

Beweis. Dabei bedeute $\{\gamma\}$ für reelles γ die absolute Distanz von γ zu der der Zahl γ nächstliegenden ganzen Zahl.

Beweis. Es bedeute $\theta(a, \beta, u)$ die für jedes reelle u definierte sogenannte charakteristische Funktion des Intervalles $a \leq u < \beta$, d.h. es sei

$$\theta(a, \beta, u) \begin{cases} = 1, & \text{falls } a \leq u < \beta \\ = 0 & \text{sonst.} \end{cases} \pmod{1}$$

Dann ist für jedes Paar von a unabhängiger Zahlen u, t ($0 \leq t \leq \frac{1}{2}$) offenbar

$$\int_0^1 \theta(a-t, a+t, u) da = 2t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und für jedes Tripel von a unabhängiger Zahlen u, v, t ($0 \leq t \leq \frac{1}{2}$):

$$\int_0^1 \theta(a-t, a+t, u) \theta(a-t, a+t, v) da \begin{cases} = 2t - \{u-v\} & \text{falls } \{u-v\} \leq 2t \\ = 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (14)$$

Weiter gilt für jedes Paar von a unabhängiger Zahlen w, τ ($0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}$) offenbar:

$$\int_0^\tau \theta(-a, a, w) da \begin{cases} = \tau - \{w\} & \text{falls } \{w\} \leq \tau \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

so dass aus (14) für $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$ hervorgeht

$$\int_0^1 \theta(a-t, a+t, u) \theta(a-t, a+t, v) da = \int_0^{2t} \theta(-a, a, u-v) da. \quad (15)$$

Jetzt bemerke ich, dass aus der Definition von $\theta(a, \beta, u)$ sofort folgt:

$$R(a-t, a+t) = \sum_{x=1}^N \theta(a-t, a+t, f(x)) - 2tN,$$

so dass gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 R^2(a-t, a+t) da &= \int_0^1 \left(\sum_{x=1}^N \theta(a-t, a+t, f(x)) \right)^2 da \\ &- 4tN \int_0^1 \left(\sum_{x=1}^N \theta(a-t, a+t, f(x)) \right) da + 4t^2 N^2 \int_0^1 da = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x,z=1}^N \int_0^1 \theta(a-t, a+t, f(x)) \theta(a-t, a+t, f(z)) da \\
&\quad - 4tN \sum_{x=1}^N \int_0^1 \theta(a-t, a+t, f(x)) da + 4t^2 N^2 = \\
&= \sum_{x,z=1}^N \int_0^{2t} \theta(-a, a, f(x)-f(z)) da - 8t^2 N^2 + 4t^2 N^2
\end{aligned}$$

wegen (15) und (13). Wir haben also

$$\begin{aligned}
\int_0^1 R^2(a-t, a+t) da &= \int_0^{2t} \left(\sum_{x,z=1}^N \theta(-a, a, f(x)-f(z)) - 2aN^2 \right) da = \\
&= \int_0^{2t} R^*(-a, a) da.
\end{aligned}$$

Beweis des Satzes 2. Aus dem Hilfssatz geht für $N \geq 1, 0 \leq t \leq \frac{1}{4}$ hervor:

$$\int_0^1 R^2(a-t, a+t) da \leq \int_0^{2t} |R^*(-a, a)| da \leq 2t N^2 D^*.$$

Für das Mass mM der Menge M sämtlicher α aus $0 \leq \alpha \leq 1$, für die

$$|R(a-t, a+t)| \leq N \sqrt{t D^* \phi}$$

gilt, ist also

$$mM \cdot N^2 t D^* \phi \leq 2t N^2 D^*,$$

d.h.

$$mM \leq 2\phi^{-1}.$$

Setzen wir jetzt $t = D^* \phi$, so ist also nach der Definition von $R(a-t, a+t)$ (siehe (2)), für jedes α ($0 \leq \alpha \leq 1$) ausserhalb M

$$|A(a-t, a+t) - 2ND^* \phi| < ND^* \phi,$$

d.h., es gilt (11), wenn wir $A(\alpha)$ statt $A(a-t, a+t)$ schreiben, wie es in Satz 2 geschieht.

Mathematics. — *Neue Integraldarstellungen für WHITTAKERSche Funktionen.* (Erste Mitteilung). Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

LITERATURVERZEICHNIS.

E. W. BARNES.

1. The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series. *Proc. London Math. Soc.*, (2) **5**, 59—116 (1907).

PH. BOCK.

2. Ueber einige Integrale aus der Theorie der BESSELSchen, WHITTAKERSchen und verwandter Funktionen. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, (2) **20**, 163—170 (1940).

S. C. DHAR.

3. On certain functions which are self-reciprocal in the HANKEL transform. *Journ. London Math. Soc.*, **14**, 30—32 (1939).

G. DOETSCH.

4. Zur Theorie der involutorischen Transformationen (General Transforms) und der selbstreziproken Funktionen. *Math. Ann.*, **113**, 665—676 (1937).
5. Theorie und Anwendung der LAPLACE-Transformation (1937).

A. ERDÉLYI.

6. Ueber eine Integraldarstellung der $W_{k,m}$ -Funktionen und ihre Darstellung durch die Funktionen des parabolischen Zylinders. *Math. Ann.*, **113**, 347—356 (1937).
7. Ueber eine Integraldarstellung der $M_{k,m}$ -Funktionen und ihre asymptotische Darstellung für grosse Werte von $\Re(k)$. *Ibidem*, **113**, 357—362 (1937).
8. Einige Integralformeln für WHITTAKERSche Funktionen. *Proc. Kon. Akad. v. Wetensch.*, Amsterdam, **41**, 481—486 (1938).

G. H. HARDY.

9. The resultant of two FOURIER kernels. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **31**, 1—6 (1935).

T. M. MACROBERT.

10. Proofs of some formulae for the generalized hypergeometric function and certain related functions. *Philosophical Magazine*, (7) **26**, 82—93 (1938).

C. S. MEIJER.

11. Einige Integraldarstellungen für WHITTAKERSche und BESSELSche Funktionen. *Proc. Kon. Akad. v. Wetensch.*, Amsterdam, **37**, 805—812 (1934).
12. Integraldarstellungen für LOMMELSche und STRUVESche Funktionen. *Ibidem*, **38**, 628—634 und 744—749 (1935).
13. Einige Integraldarstellungen aus der Theorie der BESSELSchen und WHITTAKERSchen Funktionen. *Ibidem*, **39**, 394—403 und 519—527 (1936).
14. Ueber Produkte von WHITTAKERSchen Funktionen. *Ibidem*, **40**, 133—141 und 259—263 (1937).
15. Beiträge zur Theorie der WHITTAKERSchen Funktionen. *Ibidem*, **41**, 624—633, 744—755 und 879—888 (1938).
16. Ueber BESSELSche, STRUVESche und LOMMELSche Funktionen. *Ibidem*, **43**, 198—210 und 366—378 (1940).
17. Einige Integraldarstellungen für Produkte von WHITTAKERSchen Funktionen. *Quarterly Journ. of Math. (Oxford series)*, **6**, 241—248 (1935).

18. Ueber WHITTAKERSche bezw. BESSELSche Funktionen und deren Produkte. Nieuw Archief voor Wiskunde, (2) 18, (4tes Heft) 10—39 (1936).
 19. Integraldarstellungen für STRUVESche und BESSELSche Funktionen. Compositio Mathematica, 6, 348—367 (1939).
 20. Neue Integraldarstellungen für BESSELSche Funktionen. Compositio Mathematica (Diese Arbeit wird demnächst erscheinen).
- B. MOHAN.
21. Self-reciprocal functions involving LAGUERRE polynomials. Journ. Indian Math. Soc. (New series), 3, 268—270 (1939).
 22. On self-reciprocal functions. Quarterly Journ. of Math. (Oxford series), 10, 252—260 (1939).
- N. A. SHASTRI.
23. An infinite integral involving BESSEL functions, parabolic cylinder functions, and the confluent hypergeometric functions. Math. Zeitschrift, 44, 789—793 (1939).
- E. C. TITCHMARSH.
24. Introduction to the theory of FOURIER integrals (1937).
- G. N. WATSON.
25. The harmonic functions associated with the parabolic cylinder. Proc. London Math. Soc., (2) 17, 116—148 (1918).
 26. A treatise on the theory of BESSEL functions (1922).
- E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON.
27. A course of modern analysis (fourth edition, 1927).

§ 1. Ich beweise zunächst zwei Sätze über die Funktion $G_{p,q}^{m,n}(w)$, die ich auch in einigen anderen Arbeiten ¹⁾ untersucht habe.

Die Funktion $G_{p,q}^{m,n}(w)$ wird definiert durch ²⁾

$$G_{p,q}^{m,n}\left(w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \sum_{h=1}^m \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - b_h) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 + b_h - a_j)}{j \neq h \frac{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 + b_h - b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - b_h)}{w^{b_h} \times \left. \right\} (1)} \times {}_pF_{q-1}(1 + b_h - a_1, \dots, 1 + b_h - a_p; 1 + b_h - b_1, \dots, 1 + b_h - b_q; (-1)^{m+n+p} w).$$

Hierin wird $w \neq 0$

$$0 \leq n \leq p < q, 1 \leq m \leq q, \dots \dots \dots (2)$$

$$b_j - b_h \text{ nicht ganz } (j = 1, \dots, m; h = 1, \dots, m; j \neq h). \dots (3)$$

und

$$a_j - b_h \neq 1, 2, 3, \dots (j = 1, \dots, n; h = 1, \dots, m) \dots (4)$$

vorausgesetzt; der Stern bedeutet, dass die Zahl $1 + b_h - b_h$ im System $1 + b_h - b_1, \dots, 1 + b_h - b_q$ gestrichen werden muss ³⁾.

¹⁾ MEIJER, [18], [13], [14], [16], [19] und [20].

²⁾ Man vergl. [18], 11 und [16], 199.

Ist $p = 0$, so wird die Funktion G durch $G_{0,q}^{m,0}(w | b_1, \dots, b_q)$ bezeichnet.

³⁾ Ist $|w| < 1$ und $p > 0$, so hat die Funktion $G_{p,q}^{m,n}(w)$ auch einen Sinn für $q = p$; in der vorliegenden Arbeit aber werde ich nur den Fall mit $q > p$ betrachten.

Aus der Definition (1) folgt sofort, dass $G_{p,q}^{m,n}(w)$ eine symmetrische Funktion von a_1, \dots, a_n , von a_{n+1}, \dots, a_p , von b_1, \dots, b_m und von b_{m+1}, \dots, b_q ist.

Ist

$$m + n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q > 0 \text{ und } |\arg w| < (m + n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q)\pi, \quad (5)$$

so besitzt die Funktion $G_{p,q}^{m,n}(w)$ die Integraldarstellung ⁴⁾

$$G_{p,q}^{m,n}\left(w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} w^s ds; \quad (6)$$

der Integrationsweg L läuft von $-\infty i + \lambda$ nach $\infty i + \lambda$ (λ ist eine beliebige reelle Zahl) und zwar so, dass die Punkte

$$b_j, b_j + 1, b_j + 2, \dots \quad (j=1, \dots, m)$$

auf der rechten, die Punkte

$$a_j - 1, a_j - 2, a_j - 3, \dots \quad (j=1, \dots, n)$$

hingegen auf der linken Seite von L liegen ⁵⁾.

Die Funktion $G_{p,q}^{m,n}(w)$ kann also, falls die Ungleichungen (5) erfüllt sind, auch durch (6) definiert werden.

§ 2. Der Hauptsatz der vorliegenden Arbeit lautet wie folgt:

Satz 1. Ich unterscheide fünf Fälle:

Erster Fall. Es seien $m, n, p, q, \mu, \nu, \sigma$ und τ ganz rational mit

$$1 \leq n \leq p < q < p + \tau - \sigma, \quad \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q - n < m \leq q, \quad (7)$$

$$0 \leq \nu \leq \sigma, \quad \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu < \mu \leq \tau; \quad (8)$$

es sei ferner

$$\Re(b_j + d_h) > -1 \quad (j=1, \dots, m; h=1, \dots, \mu), \quad (9)$$

$$\Re(a_j + c_h) < 1 \quad (j=1, \dots, n; h=1, \dots, \nu), \quad (10)$$

$$b_j - b_h \text{ nicht ganz} \quad (j=1, \dots, m; h=1, \dots, m; j \neq h), \quad (11)$$

$$a_j - b_h \neq 1, 2, 3, \dots \quad (j=1, \dots, n; h=1, \dots, m), \quad (12)$$

$$a_j - a_h \text{ nicht ganz} \quad (j=1, \dots, n; h=1, \dots, n; j \neq h), \quad (13)$$

$$d_j - d_h \text{ nicht ganz} \quad (j=1, \dots, \mu; h=1, \dots, \mu; j \neq h), \quad (14)$$

$$c_j - d_h \neq 1, 2, 3, \dots \quad (j=1, \dots, \nu; h=1, \dots, \mu), \quad (15)$$

$$a_j + d_h \text{ nicht ganz} \quad (j=1, \dots, n; h=1, \dots, \mu). \quad (16)$$

⁴⁾ Man vergl. BARNES, [1], 65—71. Die linke Seite von (6) ist gleich der Summe der Residuen des Integranden in den Polen auf der rechten Seite des Integrationsweges L .

⁵⁾ Dies ist möglich wegen (4).

Behauptung: Für alle Werte von η und ω mit $\eta \neq 0$, $\omega \neq 0$,
 $|\arg \eta| < (m + n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q)\pi$ und $|\arg \omega| < (\mu + \nu - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\tau)\pi$
gilt ⁶⁾

$$\left. \int_0^{\infty} G_{p,q}^{m,n} \left(\eta x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu} \left(\omega x \left| \begin{matrix} c_1, \dots, c_\sigma \\ d_1, \dots, d_\tau \end{matrix} \right. \right) dx \right\} \quad (17)$$

$$= \frac{1}{\eta} G_{q+\sigma, p+\tau}^{n+\mu, m+\nu} \left(\frac{\omega}{\eta} \left| \begin{matrix} -b_1, \dots, -b_m, c_1, \dots, c_\sigma, -b_{m+1}, \dots, -b_q \\ -a_1, \dots, -a_n, d_1, \dots, d_\tau, -a_{n+1}, \dots, -a_p \end{matrix} \right. \right).$$

Zweiter Fall. Es seien $m, p, q, \mu, \nu, \sigma$ und τ ganz rational mit

$$0 \leq p < q < p + \tau - \sigma, \quad \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q < m \leq q, \quad \dots \quad (18)$$

$$0 \leq \nu \leq \sigma, \quad 1 \leq \mu \leq \tau; \quad \dots \quad (19)$$

es seien die Bedingungen (9), (11), (14) und (15) erfüllt.

Behauptung: Für $\eta \neq 0$, $\omega \neq 0$, $|\arg \eta| < (m - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q)\pi$ und
alle Werte von $\arg \omega$ gilt (17) mit $n = 0$.

Dritter Fall. Es seien $m, n, p, q, \mu, \nu, \sigma$ und τ ganz rational mit

$$0 \leq n \leq p < q < p + \tau - \sigma, \quad \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q - n \leq m \leq q, \quad \dots \quad (20)$$

$$0 \leq \nu \leq \sigma, \quad \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu < \mu \leq \tau; \quad \dots \quad (8)$$

es seien die Bedingungen (9), ..., (16) erfüllt und es sei

$$\sum_{h=1}^p \Re(a_h) - \sum_{h=1}^q \Re(b_h) + \frac{1}{2}(q-p+1) > (q-p) \Re(c_j) \quad (j=1, \dots, \nu). \quad (21)$$

Behauptung: Für alle Werte von η und ω mit $\eta \neq 0$, $\omega \neq 0$,
 $|\arg \eta| \leq (m + n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q)\pi$ und $|\arg \omega| < (\mu + \nu - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\tau)\pi$
gilt (17).

Vierter Fall. Es seien $m, n, p, q, \mu, \nu, \sigma$ und τ ganz rational mit

$$1 \leq n \leq p < q < p + \tau - \sigma, \quad \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q - n < m \leq q, \quad \dots \quad (7)$$

$$0 \leq \nu \leq \sigma, \quad \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu \leq \mu \leq \tau; \quad \dots \quad (22)$$

es seien die Bedingungen (9), ..., (16) erfüllt und es sei

$$\sum_{h=1}^{\sigma} \Re(c_h) - \sum_{h=1}^{\tau} \Re(d_h) + \frac{1}{2}(\tau - \sigma + 1) > (\tau - \sigma) \Re(a_j) \quad (j=1, \dots, n). \quad (23)$$

Behauptung: Für alle Werte von η und ω mit $\eta \neq 0$, $\omega \neq 0$,
 $|\arg \eta| < (m + n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q)\pi$ und $|\arg \omega| \leq (\mu + \nu - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\tau)\pi$
gilt (17).

⁶⁾ Wie ich aus einer brieflichen Mitteilung weiss, ist Formel (17) auch Herrn ERDÉLYI bekannt. Man vergl. ferner DOETSCH, [4], 667, Fussnote ⁶⁾ und TITCHMARSH, [24], 54, Formel (2.1.23).

Fünfter Fall. Es seien $m, n, p, q, \mu, \nu, \sigma$ und τ ganz rational mit

$$0 \leq n \leq p < q < p + \tau - \sigma, \quad \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q - n \leq m \leq q, \quad . \quad . \quad (20)$$

$$0 \leq \nu \leq \sigma, \quad \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu \leq \mu \leq \tau; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

es seien die Bedingungen (9), ..., (16), (21) und (23) erfüllt und es sei

$$\frac{1}{q-p} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{h=1}^p \Re(a_h) - \sum_{h=1}^q \Re(b_h) \right\} + \frac{1}{\tau-\sigma} \left\{ -\frac{1}{2} + \sum_{h=1}^{\sigma} \Re(c_h) - \sum_{h=1}^{\tau} \Re(d_h) \right\} > 0.$$

Behauptung: Für alle Werte von η und ω mit $\eta \neq 0$, $\omega \neq 0$, $|\arg \eta| \leq (m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$ und $|\arg \omega| \leq (\mu+\nu-\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{2}\tau)\pi$ gilt (17).

Beweis. Bemerkung. Aus $n \leq p < q$ folgt $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q - n > 0$; für jeden der fünf Fälle gilt also wegen (7), (18) und (20)

$$0 \leq n \leq p < q \quad \text{und} \quad 1 \leq m \leq q,$$

so dass die in (17) vorkommende Funktion $G_{p,q}^{m,n}(\eta x)$ einen Sinn hat (siehe (2)).

Aus $p < q < p + \tau - \sigma$ und $\nu \leq \sigma$ folgt $\sigma < \tau$ und $\frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu > 0$; mit Rücksicht auf (8), (19) und (22) gilt daher

$$0 \leq \nu \leq \sigma < \tau \quad \text{und} \quad 1 \leq \mu \leq \tau,$$

so dass auch $G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu}(\omega x)$ einen Sinn hat.

Beweis des ersten und des zweiten Falles. Ich betrachte zunächst den Fall mit

$$0 \leq n \leq p < q < p + \tau - \sigma, \quad \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q - n < m \leq q, \quad . \quad . \quad (24)$$

$$0 \leq \nu \leq \sigma, \quad \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu < \mu \leq \tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$|\arg \eta| < (m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi, \quad |\arg \omega| < (\mu+\nu-\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{2}\tau)\pi; \quad (25)$$

ich nehme hierbei an, dass die Bedingungen (9), (10), (11), (13), (14), (15) und (16) erfüllt sind und dass überdies

$$\text{Max}_{j=1,\dots,n} \Re(a_j) - 1 < \text{Min}_{h=1,\dots,m} \Re(b_h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

ist. Der Integrand auf der rechten Seite von (6) ist dann analytisch im Innern des Streifens

$$\text{Max}_{j=1,\dots,n} \Re(a_j) - 1 < \Re(s) < \text{Min}_{h=1,\dots,m} \Re(b_h), \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

so dass man jede Gerade $\Re(s) = \lambda$ mit

$$\text{Max}_{j=1,\dots,n} \Re(a_j) - 1 < \lambda < \text{Min}_{h=1,\dots,m} \Re(b_h)$$

als Integrationsweg L wählen darf und ausserdem auf (6) den MELLINSchen Umkehrsatz ⁷⁾ anwenden kann. Durch Anwendung dieses Satzes erhält man, falls s der Bedingung (27) genügt und $|\arg \eta| < (m + n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q)\pi$ ist,

$$\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n} \left(\eta x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) x^{-s-1} dx = \frac{\eta^s \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)}.$$

Für

$$-1 - \min_{h=1, \dots, m} \Re(b_h) < \Re(s) < -\max_{j=1, \dots, n} \Re(a_j) \quad \dots \quad (28)$$

gilt also

$$\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n} \left(\eta x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) x^s dx = \frac{\eta^{-s-1} \prod_{j=1}^m \Gamma(1 + b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(-a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(-b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(1 + a_j + s)} \quad (29)$$

Nun hat man mit Rücksicht auf (6), falls

$$x > 0 \text{ und } |\arg \omega| < (\mu + \nu - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\tau)\pi$$

ist,

$$G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu} \left(\omega x \left| \begin{matrix} c_1, \dots, c_\sigma \\ d_1, \dots, d_\tau \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_A \frac{\prod_{j=1}^\mu \Gamma(d_j - s) \prod_{j=1}^\nu \Gamma(1 - c_j + s)}{\prod_{j=\mu+1}^\tau \Gamma(1 - d_j + s) \prod_{j=\nu+1}^\sigma \Gamma(c_j - s)} (\omega x)^s ds; \quad (30)$$

der Integrationsweg A läuft von $-\infty i + \beta$ nach $\infty i + \beta$ und lässt die Punkte $d_j, d_j + 1, d_j + 2, \dots$ ($j = 1, \dots, \mu$) zur Rechten, die Punkte $c_j - 1, c_j - 2, c_j - 3, \dots$ ($j = 1, \dots, \nu$) dagegen zur Linken.

Wegen (9) und (10) kann man A derart wählen, dass Bedingung (28) erfüllt ist für alle Punkte s von A , so dass Formel (29) angewendet werden darf.

Trägt man nun in die linke Seite von (17) für $G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu}(\omega x)$ das Integral (30) ein, so bekommt man, wenn man erst die Integrationsfolge vertauscht und darauf Beziehung (29) benutzt,

$$\frac{1}{2\pi i \eta} \int_A \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(-a_j - s) \prod_{j=1}^\mu \Gamma(d_j - s) \prod_{j=1}^m \Gamma(1 + b_j + s) \prod_{j=1}^\nu \Gamma(1 - c_j + s)}{\prod_{j=\mu+1}^\tau \Gamma(1 - d_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(1 + a_j + s) \prod_{j=\nu+1}^\sigma \Gamma(c_j - s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(-b_j - s)} \left(\frac{\omega}{\eta} \right)^s ds. \quad (31)$$

⁷⁾ DOETSCH, [5], 115; TITCHMARSH, [24], 47.

Nun hat man wegen (24) und (8) (siehe auch die Bemerkung am Anfang des Beweises)

$$1 \leq m + \nu \leq q + \sigma < p + \tau \text{ und } 1 \leq n + \mu \leq p + \tau;$$

ferner folgt aus (25)

$$\left| \arg \left(\frac{\omega}{\eta} \right) \right| < (n + \mu + m + \nu - \tfrac{1}{2} q - \tfrac{1}{2} \sigma - \tfrac{1}{2} p - \tfrac{1}{2} \tau) \pi.$$

Das Integral (31) ist also mit Rücksicht auf (6) gleich der rechten Seite von (17), so dass (17) bewiesen ist für den Fall, dass die Bedingungen (24), (8), (25), (26), (9), (10), (11), (13), (14), (15) und (16) erfüllt sind.

Ich werde jetzt beweisen, dass Formel (17) auch gilt, falls die Voraussetzungen (24), (8), (25) und (9), ..., (16) erfüllt sind⁸⁾. Bedingung (9) gewährleistet die Konvergenz des auf der linken Seite von (17) stehenden Integrals in der Umgebung des Punktes Null, so dass ich mich ferner auf die Untersuchung des Integranden für grosses x beschränken darf. Hierzu brauche ich das Verhalten der Funktion $G_{p,q}^{m,n}(\omega)$ für grosse Werte von $|\omega|$.

Ist $n \geq 1$ und $m + n - \tfrac{1}{2} p - \tfrac{1}{2} q > 0$, so lautet die asymptotische Entwicklung der Funktion $G_{p,q}^{m,n}(\omega)$ wie folgt⁹⁾

$$\begin{aligned} & G_{p,q}^{m,n} \left(w \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ \sim \sum_{j=1}^n w^{-1+a_j} \left\{ C_{j,0} + \frac{C_{j,1}}{w} + \frac{C_{j,2}}{w^2} + \dots \right\} \quad [|\arg w| < (m + n - \tfrac{1}{2} p - \tfrac{1}{2} q) \pi]. \end{aligned} \quad (32)$$

Die Funktion $G_{p,q}^{q,0}(\omega)$ besitzt eine asymptotische Entwicklung der Gestalt¹⁰⁾

$$\begin{aligned} & G_{p,q}^{q,0} \left(w \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right) \\ \sim \exp \left((p-q) w^{\frac{1}{q-p}} \right) w^{\vartheta} \left\{ A_0 + \frac{A_1}{w^{\frac{1}{q-p}}} + \frac{A_2}{w^{\frac{2}{q-p}}} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

worin

$$\vartheta = \frac{1}{q-p} \left\{ \tfrac{1}{2} (p-q+1) + \sum_{h=1}^q b_h - \sum_{h=1}^p a_h \right\};$$

⁸⁾ Ich werde also zeigen, dass (26) durch die weniger fordernde Annahme (12) ersetzt werden darf.

⁹⁾ BARNES, [1], 65–71.

Die in (32), (33) und (34) vorkommenden Koeffizienten $C_{j,h}$, A_h und f_h sind unabhängig von w .

¹⁰⁾ BARNES, [1], 80 und 108–110.

diese Entwicklung gilt, falls $p = q - 1$ ist, für $|\arg w| < \frac{3}{2}\pi$; ist $p < q - 1$, so gilt (33) für $|\arg w| < (q - p + 1)\pi$.

Das Verhalten von $G_{p,q}^{m,0}(w)$ für $|w| \rightarrow \infty$ kann mit Hilfe von ¹¹⁾

$$G_{p,q}^{m,0}(w) = \sum_{h=0}^{q-m} f_h G_{p,q}^{q,0}(w e^{(q-m-2h)\pi i}) \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

aus (33) abgeleitet werden.

Aus (32), (33) und (34) ergibt sich nun, dass das Integral (17) für $v = \infty$ konvergiert, falls Voraussetzung (10) erfüllt ist. Die linke Seite von (17) ist also unter den Bedingungen (24), (8), (25), (9) und (10) konvergent. Die Annahme (26) kann also fortgelassen und durch (12) ersetzt werden.

Der erste Fall ist jetzt vollständig erledigt.

Was den zweiten Fall anbetrifft, auch der Beweis von (17) mit $n = 0$ und $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q < m$ ist geliefert, jedoch unter den Annahmen

$$\frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu < \mu \leq \tau, \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

$$|\arg w| < (\mu + \nu - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\tau)\pi. \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Ich werde erst zeigen, dass (36) fortgelassen werden darf.

Sind σ und τ ganz rational mit $0 \leq \sigma < \tau$ und ist

$$b_j \neq 0, -1, -2, \dots (j = 1, \dots, \tau - 1),$$

so gibt es nämlich eine nicht von n abhängige, positive Zahl r mit der Eigenschaft

$$\left| \frac{(1+n)^{\tau-\sigma-1} \prod_{j=1}^{\sigma} (a_j + n)}{\prod_{j=1}^{\tau-1} (b_j + n)} \right| < r^{\tau-\sigma} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Für beliebige komplexe Werte von w hat man also

$$\begin{aligned} & |{}_r F_{\tau-1}(a_1, \dots, a_\sigma; b_1, \dots, b_{\tau-1}; w)| \\ & \leq 1 + \frac{r^{\tau-\sigma} |w|}{(1!)^{\tau-\sigma}} + \frac{(r^{\tau-\sigma} |w|)^2}{(2!)^{\tau-\sigma}} + \frac{(r^{\tau-\sigma} |w|)^3}{(3!)^{\tau-\sigma}} + \dots \\ & \leq \left(1 + \frac{r |w|^{\frac{1}{\tau-\sigma}}}{1!} + \frac{r^2 |w|^{\frac{2}{\tau-\sigma}}}{2!} + \frac{r^3 |w|^{\frac{3}{\tau-\sigma}}}{3!} + \dots \right)^{\tau-\sigma} \\ & = \exp \left(r (\tau - \sigma) |w|^{\frac{1}{\tau-\sigma}} \right). \end{aligned}$$

¹¹⁾ Man vergl. [16], Formel (22).

Hieraus geht hervor, falls $1 \leq n \leq \tau$ ist,

$$\left| \frac{1}{\prod_{j=n}^{\tau-1} \Gamma(\beta_j)} {}_{\sigma}F_{\tau-1}(a_1, \dots, a_{\sigma}; \beta_1, \dots, \beta_{\tau-1}; w) \right| \\ < K |w|^t \exp \left(s(\tau - \sigma) |w|^{\frac{1}{\tau - \sigma}} \right),$$

wo K , t und s unabhängig von w sind und $s > 0$ ist ¹²⁾.

Für die Funktion $G_{\sigma, \tau}^{\mu, \nu}(w)$ gilt daher wegen (1) für $|w| > 1$

$$|G_{\sigma, \tau}^{\mu, \nu}(w)| < M |w|^{\nu} \exp \left(\gamma(\tau - \sigma) |w|^{\frac{1}{\tau - \sigma}} \right) \quad (\gamma > 0). \quad (37)$$

Nun folgt aus (18), dass $0 < q - p < \tau - \sigma$ ist; das auf der linken Seite von (17) stehende Integral ist also mit Rücksicht auf (33), (34) und (37), falls $n = 0$ ist, konvergent für $|\arg \eta| < (m - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q)\pi$ und alle Werte von $\arg \omega$, so dass die Annahme (36) ausfallen kann.

Ich beweise jetzt, dass (35) durch die weniger fordernde Bedingung $1 \leq \mu \leq \tau$ ersetzt werden darf. Aus $p < q < p + \tau - \sigma$ ergibt sich nämlich $\sigma \leq \tau - 2$; aus $\nu \leq \sigma$ folgt daher $1 \leq \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu \leq \tau - \nu - 1$. Ist $1 \leq \mu \leq \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu$, so gilt also $\mu + 1 \leq \tau$, so dass die Funktion $G_{\sigma, \tau}^{\mu+1, \nu}(w)$ einen Sinn hat (man vergl. (2)). Der Fall mit

$$1 \leq \mu \leq \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu$$

kann nun mit Hilfe der Formel ¹³⁾

$$G_{\sigma, \tau}^{\mu, \nu} \left(w \left| \begin{matrix} c_1, \dots, c_{\sigma} \\ d_1, \dots, d_{\tau} \end{matrix} \right. \right) = -\frac{1}{2\pi i} \left\{ e^{-\pi i d_{\mu+1}} G_{\sigma, \tau}^{\mu+1, \nu} \left(w e^{\pi i} \left| \begin{matrix} c_1, \dots, c_{\sigma} \\ d_1, \dots, d_{\tau} \end{matrix} \right. \right) \right. \\ \left. - e^{\pi i d_{\mu+1}} G_{\sigma, \tau}^{\mu+1, \nu} \left(w e^{-\pi i} \left| \begin{matrix} c_1, \dots, c_{\sigma} \\ d_1, \dots, d_{\tau} \end{matrix} \right. \right) \right\} \quad (38)$$

aus dem Fall mit $\mu > \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu$ abgeleitet werden.

Hiermit ist der zweite Fall erledigt.

Beweis des dritten Falles. Ich nehme zunächst an, dass

¹²⁾ t bezeichnet die Anzahl der fortfallenden Anfangsglieder, d. h. die Anzahl der Anfangsglieder, bei denen der Koeffizient

$$\frac{\prod_{j=1}^{\sigma} \{a_j(a_j + 1) \dots (a_j + h - 1)\}}{h! \prod_{j=1}^{n-1} \{\beta_j(\beta_j + 1) \dots (\beta_j + h - 1)\} \prod_{j=n}^{\tau-1} \Gamma(\beta_j + h)}$$

verschwindet.

¹³⁾ Relation (38) folgt ohne Mühe aus (1).

$\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q - n < m$ ist. Nach dem ersten oder nach dem zweiten Fall (je nachdem $n > 0$ oder $= 0$ ist) gilt Formel (17) für

$$|\arg \eta| < (m + n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q)\pi,$$

wofern die Voraussetzungen (9), ..., (16) erfüllt sind.

Nun genügt die durch (1) definierte Funktion $G_{p,q}^{m,n}(w)$ den Reduktionsformeln ¹⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} G_{p,q}^{m,n}(w) &= k G_{p,q}^{q,0}(w e^{(q-m-n)\pi i}) \\ &+ \sum_{h=0}^{n-1} \gamma_h G_{p,q}^{q,n-h}(w e^{(q-m-h-2)\pi i}) + \sum_{h=1}^{q-m} \kappa_h G_{p,q}^{q,n}(w e^{(q-m-2h)\pi i}) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

und

$$\left. \begin{aligned} G_{p,q}^{m,n}(w) &= l G_{p,q}^{q,0}(w e^{(m+n-q)\pi i}) \\ &+ \sum_{h=0}^{n-1} \delta_h G_{p,q}^{q,n-h}(w e^{(m+h+2-q)\pi i}) + \sum_{h=1}^{q-m} \lambda_h G_{p,q}^{q,n}(w e^{(m+2h-q)\pi i}). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Aus (39) geht hervor mit Rücksicht auf (32), (33) und (34), dass (17) auch gilt für $\arg \eta = (m + n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q)\pi$, wofern a_j, b_j, c_j und d_j nicht nur den Bedingungen (9), ..., (16), sondern überdies noch (21) genügen; ebenso folgt aus (40), dass (17) unter der Voraussetzung (21) gültig bleibt für $\arg \eta = -(m + n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q)\pi$, womit der Beweis für den Fall mit $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q - n < m$ geliefert ist.

Ich betrachte jetzt den Fall mit $m = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q - n$. Wegen $p < q$ ist daher $m < q - n$, also $m + 1 \leq q$, so dass die Funktion $G_{p,q}^{m+1,n}(w)$ einen Sinn hat. Nach dem Vorangehenden gilt (17) mit $m + 1$ statt m und zwar für $|\arg \eta| \leq \pi$. Formel (17) kann nun mit Hilfe von ¹⁵⁾

$$\left. \begin{aligned} G_{p,q}^{m,n}\left(w \left| \begin{array}{c} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{array} \right.\right) &= -\frac{1}{2\pi i} \left\{ e^{-\pi i \beta_{m+1}} G_{p,q}^{m+1,n}\left(we^{\pi i} \left| \begin{array}{c} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{array} \right.\right) \right. \\ &\quad \left. - e^{\pi i \beta_{m+1}} G_{p,q}^{m+1,n}\left(we^{-\pi i} \left| \begin{array}{c} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{array} \right.\right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

und

$$\left. \begin{aligned} G_{p,q}^{m,n}\left(w \left| \begin{array}{c} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{array} \right.\right) &= -\frac{1}{2\pi i} \left\{ e^{-\pi i \alpha_{n+1}} G_{p,q}^{m,n+1}\left(we^{\pi i} \left| \begin{array}{c} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{array} \right.\right) \right. \\ &\quad \left. - e^{\pi i \alpha_{n+1}} G_{p,q}^{m,n+1}\left(we^{-\pi i} \left| \begin{array}{c} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{array} \right.\right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

aus (17) mit $m + 1$ statt m abgeleitet werden (man beachte auch die in § 1 erwähnten Symmetrieeigenschaften der G -Funktion).

Hiermit ist der dritte Fall erledigt.

¹⁴⁾ Man vergl. [16], Formel (23). Die Zahlen $k, l, \gamma_h, \delta_h, \kappa_h$ und λ_h sind nicht von w abhängig.

¹⁵⁾ Die Beziehungen (41) und (42) folgen sofort aus der Definition der Funktion $G_{p,q}^{m,n}(w)$; (41) ist äquivalent mit (38).

Der Beweis des vierten Falles geht auf analoge Weise.

Der fünfte Fall kann aus dem dritten abgeleitet werden; man lasse $\arg \omega$ nach $\pm (\mu + \nu - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\tau)\pi$ streben.

§ 3. Eine Folgerung von Satz 1 ist

Satz 2. Ich unterscheide drei Fälle:

Erster Fall. Es seien p, μ, ν, σ und τ ganz rational mit

$$p > 0, 0 \leq \nu \leq \sigma \leq \tau - 2, 1 + \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu < \mu \leq \tau;$$

es sei ferner

$$\Re(c_h - a_j) < 1 \quad (h = 1, \dots, \nu; j = 1, \dots, p), \dots (43)$$

$$a_j - b_1 \neq -1, -2, -3, \dots (j = 1, \dots, p), \dots (44)$$

$$a_j - a_h \text{ nicht ganz } (j = 1, \dots, p; h = 1, \dots, p; j \neq h), \dots (45)$$

$$d_j - d_h \text{ nicht ganz } (j = 1, \dots, \mu; h = 1, \dots, \mu; j \neq h), \dots (46)$$

$$c_j - d_h \neq 1, 2, 3, \dots (j = 1, \dots, \nu; h = 1, \dots, \mu), \dots (47)$$

$$a_j - d_h \text{ nicht ganz } (j = 1, \dots, p; h = 1, \dots, \mu). \dots (48)$$

Behauptung: Für alle Werte von η und ω mit $\eta \neq 0, \omega \neq 0, |\arg \eta| < \frac{1}{2}\pi$ und $|\arg \omega| < (\mu + \nu - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\tau - 1)\pi$ gilt

$$\prod_{j=1}^p \left\{ \frac{\Gamma(1-b_1+a_j)}{\Gamma(1-b_1+b_{j+1})} \right\} \int_{-\infty}^{(0+)} (\eta x)^{-b_1} {}_pF_p \left(\begin{matrix} 1-b_1+a_1, \dots, 1-b_1+a_p; \\ 1-b_1+b_2, \dots, 1-b_1+b_{p+1}; \end{matrix} \eta x \right) \times G_{\sigma, \tau}^{\mu, \nu} \left(\omega x \left| \begin{matrix} c_1, \dots, c_\sigma \\ d_1, \dots, d_\tau \end{matrix} \right. \right) dx = \frac{2\pi i}{\eta} G_{\sigma+p+1, \tau+p}^{\mu+p, \nu} \left(\frac{\omega}{\eta} \left| \begin{matrix} c_1, \dots, c_\sigma, b_1, \dots, b_{p+1} \\ a_1, \dots, a_p, d_1, \dots, d_\tau \end{matrix} \right. \right). \quad (49)$$

Zweiter Fall. Es seien p, μ, ν, σ und τ ganz rational mit

$$p > 0, 0 \leq \nu \leq \sigma \leq \tau - 2, 1 + \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu \leq \mu \leq \tau;$$

es seien die Bedingungen (43), ..., (48) erfüllt und es sei

$$\sum_{h=1}^{\sigma} \Re(c_h) - \sum_{h=1}^{\tau} \Re(d_h) + \frac{1}{2}(\tau - \sigma + 1) > (\sigma - \tau) \Re(a_j) \quad (j = 1, \dots, p).$$

Behauptung: Für alle Werte von η und ω mit $\eta \neq 0, \omega \neq 0, |\arg \eta| < \frac{1}{2}\pi$ und $|\arg \omega| \leq (\mu + \nu - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\tau - 1)\pi$ gilt (49).

Dritter Fall. Es seien μ, ν, σ und τ ganz rational mit

$$0 \leq \nu \leq \sigma \leq \tau - 2, 1 \leq \mu \leq \tau;$$

es seien die Bedingungen (46) und (47) erfüllt.

Behauptung. Für $\eta \neq 0, \omega \neq 0, |\arg \eta| < \frac{1}{2}\pi$ und alle Werte von $\arg \omega$ gilt (49) mit $p=0$; d.h. also es gilt

$$\int_{-\infty}^{(0+)} (\eta x)^{-b} e^{\eta x} G_{\sigma, \tau}^{\mu, \nu} \left(\omega x \left| \begin{matrix} c_1, \dots, c_\sigma \\ d_1, \dots, d_\tau \end{matrix} \right. \right) dx = \frac{2\pi i}{\eta} G_{\sigma+1, \tau}^{\mu, \nu} \left(\frac{\omega}{\eta} \left| \begin{matrix} c_1, \dots, c_\sigma, b \\ d_1, \dots, d_\tau \end{matrix} \right. \right). \quad (50)$$

Beweis. Ist

$$\Re(d_h - b_1) > -1 \quad (h = 1, \dots, \mu), \dots \dots \dots (51)$$

so kann das Schleifenintegral in (49) in bekannter Weise auf ein geradliniges Integral reduziert werden:

$$\left. \begin{aligned} & \prod_{j=1}^p \left\{ \frac{\Gamma(1-b_1+a_j)}{\Gamma(1-b_1+b_{j+1})} \right\} \int_{-\infty}^{(0+)} (\eta x)^{-b_1} {}_pF_p(\eta x) G_{\sigma, \tau}^{\mu, \nu}(\omega x) dx \\ &= \prod_{j=1}^p \left\{ \frac{\Gamma(1-b_1+a_j)}{\Gamma(1-b_1+b_{j+1})} \right\} \int_0^{\infty} (\eta t)^{-b_1} {}_pF_p(-\eta t) \{ e^{\pi i b_1} G_{\sigma, \tau}^{\mu, \nu}(\omega t e^{-\pi i}) - e^{-\pi i b_1} G_{\sigma, \tau}^{\mu, \nu}(\omega t e^{\pi i}) \} dt. \end{aligned} \right\} (52)$$

Nun hat man wegen (1)

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^p \left\{ \frac{\Gamma(1-b_1+a_j)}{\Gamma(1-b_1+b_{j+1})} \right\} (\eta t)^{-b_1} {}_pF_p \left(\begin{matrix} 1-b_1+a_1, \dots, 1-b_1+a_p; \\ 1-b_1+b_2, \dots, 1-b_1+b_{p+1}; \end{matrix} -\eta t \right) \\ &= G_{p, p+1}^{1, p} \left(\eta t \left| \begin{matrix} -a_1, \dots, -a_p \\ -b_1, \dots, -b_{p+1} \end{matrix} \right. \right); \end{aligned}$$

die rechte Seite von (52) ist also gleich

$$\int_0^{\infty} G_{p, p+1}^{1, p} \left(\eta t \left| \begin{matrix} -a_1, \dots, -a_p \\ -b_1, \dots, -b_{p+1} \end{matrix} \right. \right) \{ e^{\pi i b_1} G_{\sigma, \tau}^{\mu, \nu}(\omega t e^{-\pi i}) - e^{-\pi i b_1} G_{\sigma, \tau}^{\mu, \nu}(\omega t e^{\pi i}) \} dt.$$

Aus Satz 1 folgt ¹⁶⁾, dass dieses Integral gleich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\eta} \left\{ e^{\pi i b_1} G_{\sigma+p+1, \tau+p}^{\mu+p, \nu+1} \left(\frac{\omega e^{-\pi i}}{\eta} \left| \begin{matrix} b_1, c_1, \dots, c_{\sigma}, b_2, \dots, b_{p+1} \\ a_1, \dots, a_p, d_1, \dots, d_{\tau} \end{matrix} \right. \right) \right. \\ & \quad \left. - e^{-\pi i b_1} G_{\sigma+p+1, \tau+p}^{\mu+p, \nu+1} \left(\frac{\omega e^{\pi i}}{\eta} \left| \begin{matrix} b_1, c_1, \dots, c_{\sigma}, b_2, \dots, b_{p+1} \\ a_1, \dots, a_p, d_1, \dots, d_{\tau} \end{matrix} \right. \right) \right\} \end{aligned}$$

ist; und dieser Ausdruck kann mit Hilfe von (42) ¹⁷⁾ auf

$$\frac{2\pi i}{\eta} G_{\sigma+p+1, \tau+p}^{\mu+p, \nu} \left(\frac{\omega}{\eta} \left| \begin{matrix} c_1, \dots, c_{\sigma}, b_1, \dots, b_{p+1} \\ a_1, \dots, a_p, d_1, \dots, d_{\tau} \end{matrix} \right. \right)$$

zurückgeführt werden.

Hiermit ist der Beweis geliefert ¹⁸⁾.

¹⁶⁾ Ich benutze den ersten Fall von Satz 1, falls $p > 0$, $1 + \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu < \mu$ und $|\arg \omega| < (\mu + \nu - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\tau - 1)\pi$ ist, den vierten Fall, falls $p > 0$, $1 + \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu \leq \mu$ und $|\arg \omega| \leq (\mu + \nu - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\tau - 1)\pi$ ist, und den zweiten Fall, falls $p = 0$ ist.

¹⁷⁾ Man beachte die Symmetrieeigenschaften der G -Funktion.

¹⁸⁾ Voraussetzung (51) darf bei (49) fortgelassen werden, weil der Punkt $x = 0$ nicht auf dem Integrationswege liegt.

Geology. — *On gersdorffite in the Falconbridge ore deposit, Sudbury District, Ontario, Canada.* By L. P. G. KONING. (Communicated by Prof. H. A. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

Introduction.

The nickeliferous pyrrhotite deposits from the Sudbury district in Ontario, Canada, for the greater part carry sulphides of Fe, Ni and Cu as ore minerals, but in some of the ore bodies arsenides and sulpharsenides of nickel (gersdorffite, etc.) are found as minor constituents. This publication describes the mode of occurrence and the paragenetic relationship of gersdorffite in the Falconbridge ore deposit.

The rather unusual mode of occurrence of the nickel sulpharsenide in the nickel ores around the Sudbury norite laccolith has induced the writer to give some suggestions at the end of this paper with regard to the possible connections between these nickel ores of the liquid-magmatic type and the hydrothermal Co-Ni-Ag-veins from Cobalt, St. Lorraine etc. in Ontario.

*Geology of the Falconbridge ore body*¹⁾.

The Falconbridge ore body is located at the south-eastern margin of the Sudbury norite zone. As is shown on maps by ROBERTS and LONGYEAR most of the rock formations in the neighbourhood of the ore body are covered by glacial material; only a few outcrops are found near the contact of the norite. The rocks known in the vicinity of the ore body are quartzite-graywacke, greenstone and norite. COLEMAN²⁾ classified the quartzite-graywacke formation and the greenstones as pre-Huronian and called them Sudbury series. The norite, which belongs to the great Sudbury laccolith, in its developments varies between unaltered norite, altered norite (silicified norite, which has undergone hydrothermal alteration in the vicinity of

¹⁾ Reference: H. M. ROBERTS and R. D. LONGYEAR. *Genesis of the Sudbury Nickel-Copper ores.* Transact. Am. Inst. Min. Eng. **59**, 27—68 (1918).

A. G. BURROWS and H. C. RICKABY. *Sudbury Nickel Field restudied.* Ann. Rep. Ont. Dep. Mines, **43**, Part II (1934).

²⁾ A. P. COLEMAN. *The Nickel Industry.* Can. Dep. Mines. Bull. **170**, 6 (1913).

Some data on the composition and the mode of occurrence of the ores have been taken from informations given by Mr. F. MCINTOSH GALBRAITH, Chief Geologist of the Falconbridge Nickel Mines Ltd., to the department of Economic Geology of the Geological Institute of the University of Amsterdam. The writer wishes to thank Dr. J. WILHELMSSON, who assisted him with many suggestions, for putting these informations at his disposal, together with the rock samples, which furnished the material for this study.

the ore body) and spotted norite, containing sulphide blebs. Generally the lower contact of the norite dips 45° towards the centre of the Sudbury basin, but in the Falconbridge mine it may stand nearly vertically or even in an overturned position. The ore body occurs at the contact of the norite and the Sudbury series, where the norite usually forms the hanging wall and the Sudbury series the footwall. The unaltered norite in its regular composition contains hyperstene, augite, plagioclase, biotite and quartz, the plagioclase usually being labradorite. The Falconbridge norite however contains a more acid plagioclase: oligoclase-andesine to andesine. Near the contact of the norite and the ore body spots of pyrrhotite and chalcopyrite are visible in the norite. The ore body has a length of 7500 ft (2286 m) and may be called a typical example of the so-called marginal deposits of the Sudbury district. Three main types of nickel-copper ore can be distinguished: 1^o. norite, partly impregnated with sulphides (disseminated norite); 2^o. footwall rock (usually quartzite), partly impregnated with sulphides; 3^o. massive sulphides, containing small particles of rock (breccia ore).

The enclosed rock fragments in the massive sulphide ore consist of footwall greenstone and silicified norite (jasperoid). The relations between sulphides and country rock indicate that the ore minerals are partly primary constituents of the basic intrusive rock (the sulphides of the disseminated norite), whilst another part is more or less „intrusive” between norite hanging wall and greenstone footwall (the breccia ore). The disseminated norite constitutes the concentrating ore of the mill and contains $\pm 0,9\%$ Ni and $\pm 0,9\%$ Cu. The breccia ore and massive sulphides, which go directly to the blast furnace, have 2,25—5 % Ni and $\pm 1\%$ Cu.

The sulphide minerals are, in order of abundance, pyrrhotite, pentlandite and chalcopyrite. Other minerals found are magnetite, pyrite, galena and nickel arsenides and sulpharsenides. The arsenides and sulpharsenides of nickel occur in local shoots and pockets, mostly along the margins of the ore body. The metals of the platinum group are largely concentrated in them.

Microscopic description of ore specimens.

The following types of ore from the Falconbridge mine have been subjected to microscopical examination: 1^o. massive pyrrhotite-pentlandite ore; 2^o. massive gersdorffite ore; 3^o. country rock impregnated with sulphides. The mineral association of these ores appeared to be confined to the following specimens: pyrrhotite, pentlandite, chalcopyrite, gersdorffite (NiAsS), pyrite, magnetite, rammelsbergite (NiAs_2), bravoite ($(\text{Fe}, \text{Ni})\text{S}_2$), gangue minerals (silicates, quartz).

1. Massive pyrrhotite-pentlandite ore.

Pyrrhotite. This rather highly reflecting, reddish brown and very

strongly anisotropic mineral is the predominant sulphide of the ore. In the polished sections studied no crystal outlines have been observed. In general the grains are very irregular. Some individuals show a lamellar texture of darker and lighter bands. VAN DER VEEN³⁾ was of the opinion that this lamellar texture, which is often observed in pyrrhotites, should possibly represent a transformation, perhaps a separation by unmixing in the solid state, or an allotropy. SCHNEIDERHÖHN and RAMDOHR⁴⁾ suppose this lamellar texture to be due to unmixing.

Pentlandite. The isotropic and light-coloured pentlandite occurs either as minute blade-like or feather-shaped masses starting from cleavage planes or cracks within the pyrrhotite crystals (Fig. 1), or as veinlets between pyrrhotite individuals (Fig. 2). Sometimes transitions from massive

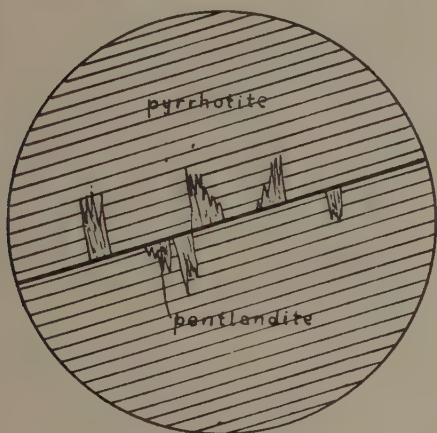


Fig. 1.

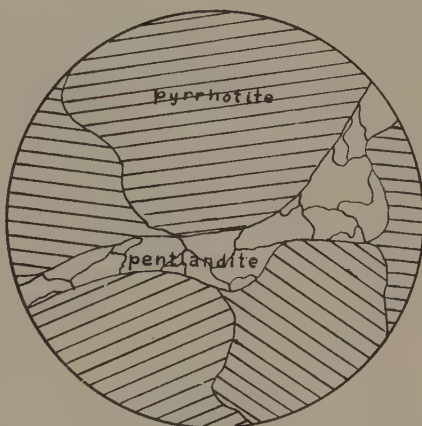


Fig. 2.

pentlandite veinlets into the feather-shaped mode of development can be observed. The pentlandite of the veinlets is fine-grained as compared with the adjacent pyrrhotite crystals and often shows cleavage along (111). The relationships between pyrrhotite and pentlandite as found in these ores are typical for all nickel-bearing pyrrhotite deposits of the liquid-magmatic class (Sudbury, S. Norway, East Griqualand and Pondoland in S. Africa, Petsamo region in Finland, etc.). In a recent article R. L. HEWITT⁵⁾ concluded from experiments and descriptions of various other observers that pentlandite may be caused to unmix from pyrrhotite by slow cooling from 800° downwards. The unmixed pentlandite then segregates around the grain boundaries of the pyrrhotite. This kind of origin may have been responsible for part of the pentlandite from the veinlets, whilst another part may have been produced by crystallization from immiscible

³⁾ R. W. VAN DER VEEN, *Mineragraphy and ore deposition*, 49 and figs. 53, 54 (1925).

⁴⁾ H. SCHNEIDERHÖHN und P. RAMDOHR, *Lehrbuch der Erzmikroskopie*, 133—137, and fig. 58 (1931).

⁵⁾ R. L. HEWITT, *Experiments bearing on the relation of pyrrhotite to other sulphides*, *Econ. Geol.* 23, 305—338 (1938).

residuary liquids. Small pentlandite grains around pyrrhotite grain boundaries and feather-shaped pentlandite lenses within the pyrrhotite grains are to be regarded probably in both instances as the product of unmixing.

Chalcopyrite. This greenish yellow mineral is distinctly younger than pyrrhotite and pentlandite and occurs as veinlets and grains in the pyrrhotite. It can also often be observed to replace the pentlandite (Fig. 3). In a few instances chalcopyrite shows polysynthetic twinning. The mineral has no distinct crystal outlines.



Fig. 3.

Gersdorffite. This isotropic, white and highly reflecting mineral occurs as sparsely disseminated idiomorphic grains in the massive pyrrhotite-pentlandite ores. It is always earlier than the sulphide minerals pyrrhotite, pentlandite and chalcopyrite and displays distinct cubic and octahedral crystal forms. Cleavage along (100) can practically everywhere be observed (Figures 4 and 5).

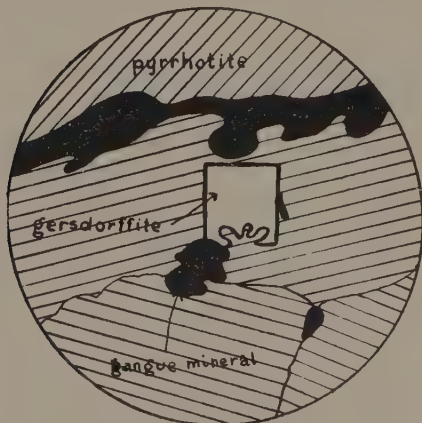


Fig. 4.

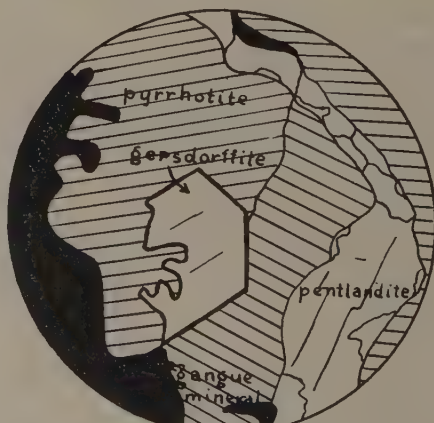


Fig. 5.

Magnetite. This isotropic, hard and light brown-grayish mineral occurs sparingly in the polished sections. It is present as euhedral crystals, rarely with irregular boundaries. The crystals are commonly developed in the gangue material, with only a slight rounding of the angles.

Bravoite. The pentlandite sometimes contains minute aggregates consisting of bravoite and grains of a very highly reflecting mineral, probably pyrite or marcasite. The isotropic mineral bravoite has almost the same colour as pyrrhotite and probably owes its origin to weathering of the pentlandite. The alteration of pentlandite into bravoite may be seen proceeding along cleavage-lines and cracks.

2. Massive gersdorffite ore.

The polished sections of massive gersdorffite ore have been taken from a rock sample, which contains the sulpharsenide as the predominant mineral and shows a banded structure of alternating sulphide and sulpharsenide bands.

Gersdorffite. This mineral is present as large individuals, often with well developed crystal boundaries. As in the massive sulphide ores the sulpharsenide is distinctly of earlier crystallization than pyrrhotite and pentlandite, which surround the gersdorffite individuals, partly penetrating into them and corroding them (Figures 6 and 7).



Fig. 6.



Fig. 7.

Etching with HNO_3 1:1 during one minute disclosed the isometric structure pattern of the mineral. The tarnished crystal surface shows a striation of darker and lighter strips parallel to (100). Crystal boundaries are often only slightly attacked by the etching agent (zonal structure?, Fig. 8).

Rammelsbergite. This mineral has been found in only one polished section. It has practically the same colour, hardness and reflecting power as gersdorffite, in which it occurs as minute stars. The identification as

rammelsbergite seems well warranted by the typical triplet stars and the intimate association with Ni-sulpharsenide (Fig. 9).

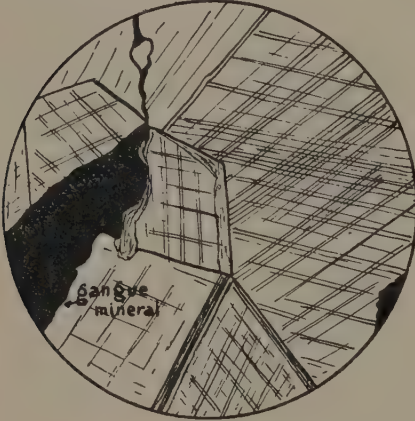


Fig. 8.



Fig. 9.

Pyrrhotite, *pentlandite*, *chalcopyrite* are minor constituents of this ore. They occur as minute grains of rounded and lenticular shape, replacing gersdorffite (Fig. 10).

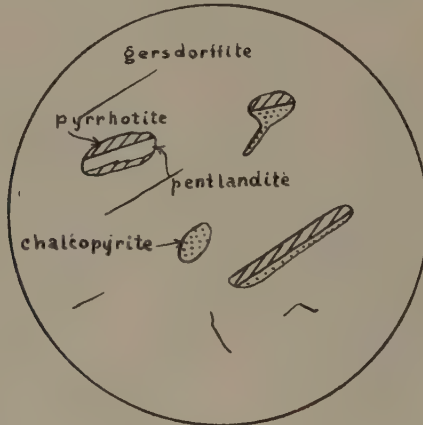


Fig. 10.

In a few instances the pentlandite has been replaced partly by bravoite, together with pyrite or marcasite grains, all three probably formed by weathering of the pentlandite.

3. Norite impregnated with sulphides (disseminated norite).

In the polished sections the same minerals as mentioned from the above-treated kinds of ore have been observed. In the first place the presence of well-developed cubes of gersdorffite has to be noticed. The sulpharsenide,

however, is of quite secondary importance in this class of ore. Pyrrhotite is the most important mineral, generally occurring together with pentlandite, and sometimes with chalcopyrite. For the greater part the rock consists of silicates. In thin sections the following minerals have been observed: intermediate plagioclase (oligoclase-andesine to andesine), amphibole, pyroxene, biotite, quartz, with some accessory apatite, zircon and ore minerals. Carbonates, chlorite and epidote-zoisite are developed as secondary minerals of hydrothermal origin. This mineralogical composition points to a more or less hydrothermally altered dioritic rock.

Other occurrences of gersdorffite in pyrrhotite nickel ores.

The nickeliferous pyrrhotite deposits of economic importance are related to basic igneous rocks (peridotite, norite, gabbro) of deep-seated crystallization. They all contain pyrrhotite, pentlandite, chalcopyrite and some other minerals like magnetite, pyrite, arsenopyrite, etc., as main ore minerals. Only from two occurrences of this liquid-magmatic class the rare mineral gersdorffite has been mentioned, viz. from the Sudbury district in Ontario, and from the Tajima district in W. Japan. WANDKE, HOFFMAN and LAUSEN⁶⁾ mentioned gersdorffite from the Worthington mine, Sudbury, where this mineral occurs together with arsenopyrite as large crystals enclosing pyrrhotite, pentlandite and chalcopyrite. The ore body is confined to a shattered dike-like mass of quartz-diorite, which has generally been called norite. In the Frood mine and Crean Hill mine gersdorffite has also been found. E. THOMSON⁷⁾ published a chemical analysis of the gersdorffite from the Crean Hill mine.

In W. Japan the nickel-bearing pyrrhotite ores occur in connection with ultrabasic serpentine rocks, originally dunite and peridotite. The ore of the Natsume mine in the Tajima district according to A. NAKAMOTO consists of fine-grained pyrrhotite, arsenopyrite, arite (Ni (As, Sb)), gersdorffite, associated with some sphalerite, galena, tetrahedrite and pentlandite⁸⁾.

Paragenetically the position of the gersdorffite in the Falconbridge ore body seems to be typical for the Sudbury district. The mineral precedes pyrrhotite, pentlandite and the Cu-sulphides in age. Its relation with regard to magnetite, however, remains to be solved.

⁶⁾ A. WANDKE and B. HOFFMAN, A study of the Sudbury ore deposits, *Econ. Geol.* **19**, 169—204 (1924).

C. LAUSEN, Graphic intergrowth of niccolite and chalcopyrite, Worthington Mine, Sudbury, *Econ. Geol.* **25**, 356—364 (1930).

⁷⁾ E. THOMSON, A mineralographic study of the pyrite group, *Contr. to Canad. Min.* 32—39 (1921).

⁸⁾ Cited by TAKEO KATO in "Two types of nickeliferous pyrrhotite deposits in Korea", *Jap. Journ. Geol. Geogr.* **13**, 269 (1936).

Genetic relations between the liquid-magmatic nickel pyrrhotite deposits from the Sudbury district and the hydrothermal Co-Ni-Ag-veins in Ontario.

Between the two types of deposits there are important differences:

1. The nickeliferous pyrrhotite deposits of Sudbury have partly crystallized directly from molten magma (the disseminated ores), whilst another part is more or less of pneumatolytic-hydrothermal origin (the offset deposits and breccia ores). The Co-Ni-Ag-veins from Cobalt, etc., on the contrary are of purely hydrothermal (mesothermal) origin ⁹⁾.

2. The liquid-magmatic nickel deposits are associated with basic magmas. The hydrothermal veins of Cobalt, on the contrary, very probably are associated with acid or intermediate magmas ¹⁰⁾.

3. In the liquid-magmatic nickel deposits Fe is the predominating metal and Ni relatively plays a subordinate part. On the other hand Ni (and also Co, Ag) predominates over Fe in the hydrothermal veins.

4. The ore minerals of the liquid-magmatic nickel deposits are mainly sulphides of Fe, Ni and Cu, whereas the hydrothermal Co-Ni-Ag-deposits carry arsenides, sulpharsenides, antimonides and sulphantimonides of Co, Ni and Ag.

In the writer's opinion the above-mentioned differences may be used as arguments for a suggestion about a possible genetic relationship between these two types of ore deposits, to be formulated as follows:

1. It is possible that the "aplites", to which, according to BASTIN, the Co-Ni-Ag-veins of the Cobalt district probably are related, represent the acid or intermediate differentiate from the primary magma (i.e. basaltic magma), of which the Sudbury norite may represent a basic member.

2. As known from various analyses the ratio Co : Ni in the average igneous rock according to V. M. GOLDSCHMIDT is about 4 : 10 ¹¹⁾. In the Sudbury ore this ratio is recorded by E. S. BASTIN to be about 1 : 40 to 1 : 33 ¹²⁾. V. M. GOLDSCHMIDT, in collaboration with H. BAUER and H. WITTE ¹³⁾, determined photometrically the quantities of Co and Ni in the igneous rocks with regard to the quantities of Mg and Fe. As a result of these investigations it appeared that geochemically Ni is more related to Mg and therefore relatively more concentrated in Mg-rich rocks (norite, dunite, peridotite), whereas Co follows Fe in Fe-rich minerals. As a consequence of this phenomenon, which finds its explanation in the equality of ion-radii of the mutually related metal couples (Ni-Mg, Co-Fe), norites

⁹⁾ W. LINDGREN, Mineral deposits, 622 (1933).

¹⁰⁾ E. S. BASTIN, The nickel-cobalt-native silver ore type, Econ. Geol. **34**, 1—40 (1939).

¹¹⁾ V. M. GOLDSCHMIDT, Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente, IX, Die Mengenverhältnisse der Elemente und der Atom-Arten, Skrifter Utgitt av. Det Norske Videnskaps Akademi, Oslo, 66—68 (1938).

¹²⁾ E. S. BASTIN, op cit., 19, 20 (1939).

¹³⁾ V. M. GOLDSCHMIDT, op. cit.

and other ultrabasic igneous rocks show a much lower Co : Ni ratio than the average igneous rock. The figures seem to be about 1 : 12. On the other hand larger concentrations of Co are to be expected in and around igneous rocks of medium or acid character, as for instance in the Cobalt district of Ontario. During the complicated processes of differentiation in the Ontario region, Ni was probably to a large extent extracted from the primary basaltic magma and dissolved in iron sulphides accompanying gabbroid igneous rocks, whereas Co remained for the greater part in solution in the silicate liquid. In the remaining intermediate magma a shifting took place in the ratio Co : Ni in favour of Co. Analyses of the hydrothermal Co-Ni-Ag-ores from Cobalt, Ontario, on the average show the ratio Co : Ni = 1 : 0.6, according to BASTIN¹⁴). The high Co : Ni ratio in the hydrothermal Co-Ni-Ag-veins from Cobalt, which are of approximately the same geological age (Keweenawan) as the Sudbury nickel deposits, might be considered as the ultimate result of the separation the two elements Co and Ni were forced to undergo during the process of magmatic differentiation.

3. The hydrothermal Co-Ni-Ag-veins are mainly characterized by the presence of As in arsenides and sulpharsenides of Co, Ni and Ag. The occasional concentration of arsenic compounds, however, in some ore bodies in the Sudbury district may be explained by accepting a common parent magma for both the nickeliferous pyrrhotite ores and the Co-Ni-Ag-veins. The latter, however, were separated after the mother liquid had undergone a certain degree of further differentiation.

¹⁴) E. S. BASTIN, op. cit., 19, 20 (1939).

Amsterdam, Geological Institute.

Petrology. — *Cordieritpseudomorphosen in Sanidin-Albit-Rhyoliten von Tandjoeng Illipoi, Wetar (Niederl. Ost-Indien).* Von J. HEERING.
(Communicated by Prof. H. A. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

Einleitung.

Als Teilnehmer an der Geologischen Expedition der Universität Amsterdam nach den Kleinen Sunda Inseln im Jahre 1937 unter Leitung van Prof. Dr. H. A. BROUWER hatte ich u.m. Gelegenheit die östliche Hälfte der Insel Wetar zu untersuchen.



Abb. 1. Die Insel Wetar, mit Tandjoeng Illipoi. Maszstab 1 : 1500000.

In der Mitte der Insel, an der Südküste, liegt Tandjoeng¹⁾ Illipoi, wo Sanidin-Albit-Rhyolite zusammen mit Graniten bis Granodioriten vorkommen.

Die Sanidin-Albit-Rhyolite.

Es kommen zwei verschiedene Typen von Sanidin-Albit-Rhyoliten vor, in denen Cordieritpseudomorphosen auftreten.

Der erste Typus (H. 177 \times , H. 167, H. 133, H. 134) ist hellgrau bis graugrün gefärbt und hat eine porphyrische Struktur. Makroskopisch zeigt er in einer felsitischen Grundmasse ziemlich viele Einsprenglinge von Quarz, Feldspat, Biotit, chloritisiertem Biotit und Cordieritpseudomorphosen. Quarz ist etwas reichlicher vorhanden als Feldspat. Es gibt sowohl Quarze mit schöner idiomorpher Begrenzung, als solche, die magmatisch korrodiert sind, mit abgerundeten Ecken und Einbuchtungen, während hier und da nur skelettartige Individuen übrig geblieben sind. Die Feldspäte sind idiomorph entwickelt; sie sind zum Teil nach dem Albit- und Karls-

¹⁾ Tandjoeng (malaiisch) = Kap.

bader Gesetz, seltener nach dem Periklingesetz, verzwillingt, zum Teil aber auch unverzwillingt. Die Plagioklase wurden bestimmt als Albit²⁾. Daneben gibt es auch, nur selten nach dem Karlsbader Gesetz verzwillingte, Kalifeldspäte. Bestimmungen mit dem Universal-Drehtisch erwiesen, dass die Kalifeldspäte optisch zweiachsig negativ sind mit sehr kleinem Achsenwinkel ($2V = 6^\circ$). Der Kalifeldspat ist also Sanidin. Die meisten Plagioklase, sowie die Sanidine, sind im Dünnschliff zum Teil durch Kaolinisierung bräunlich gefärbt. Umwandlung in Sericit und Karbonat ist häufig. Die Biotite sind zum grössten Teil umgewandelt in Chlorit (oft Pennin).

In der Grundmasse tritt Albit in kleinen leistenförmigen Individuen auf, aber der grösste Teil wird aufgebaut von einem sehr feinkörnigen Aggregat von Quarz und Alkalifeldspat, zwischen denen viele kleine Sericitschuppen und Karbonatkörner vorkommen. Magnetit ist nur spärlich vorhanden, während accessorisch Apatit in kleinen idiomorphen Säulchen vorkommt. Als Sekundärbildungen können Karbonat, Epidot-Zoisit, Sericit, Chlorit und Kaolin erwähnt werden.

Der zweite Typus (H. 173, H. 175 \times , H. 70 \times). In soweit gibt es eine Uebereinstimmung mit dem ersten Typus, dass dieselben Einsprenglinge in beiden Typen vorkommen. Auch hier sind die Einsprenglinge Quarz, saurer Plagioklas, Kalifeldspat (Sanidin), z.T. in Chlorit umgewandelter Biotit und Cordieritpseudomorphosen. Die Sanidine sind aber in dem zweiten Typus viel grösser. Das Zentrum der, bis 8 m.m. grossen, Feldspatindividuen ist wasserhell und wird umgeben von einem ziemlich breiten Rand von mattweissem Albit. Ursache dieser Erscheinung ist ein Albitisierungsprozess, der möglicherweise der Entstehung aller Albite in den Illipoi-Gesteinen zu Grunde liegt. Einige Feldspatindividuen zeigen sekundäre Perthitbildung. Die Menge an Quarzeinsprenglinge ist ungefähr wie im vorigen Typus, letzterer enthält aber weniger Chlorit und chloritisierten Biotit. Die Grundmasse ist was ihre Struktur anbelangt recht verschieden vom vorigen Typus; die Zusammensetzung aber ist ungefähr dieselbe. Z.T. wird die Grundmasse gebildet von einer Art granophyrischer Verwachsung von Quarz und Alkalifeldspat (oft nur wahrnehmbar mit starker Vergrösserung). Bisweilen umsäumt ein breiter Rand Granophyr die Quarz-Einsprenglinge. Kleine leistenförmige Albite kommen reichlich vor. Die Grundmasse dieses Typus ist phanokristallin. Auch in diesem Gestein ist accessorisch Apatit vorhanden, sowie die Sekundärbildungen Kaolin, Sericit, Karbonat, Epidot-Zoisit. Leukoxen, Limonit und Chlorit.

Die Cordieritpseudomorphosen.

Die Cordieritpseudomorphosen bilden in diesen Sanidin-Albit-Rhyoliten gute idiomorphe Kristalle. Schon makroskopisch sind die kurz-säulen-

²⁾ Wenn von Albit die Rede ist, so handelt es sich oft um Plagioklase mit wechselnder Zusammensetzung von Albit bis Albit-Oligoklas.

förmigen, maximal 6 bis 7 m.m. grossen Cordieritpseudomorphosen zu unterscheiden. Ihre Farbe ist immer bläulichgrün bis graugrün. Im Längsschnitt sind die Pseudomorphosen viereckig, im Querschnitt sechseckig, dann vielfach mit abgerundeten Ecken. Zwillinge sind ziemlich häufig. Viele Individuen zeigen auf der Basis die bekannte Teilung in sechs Feldern. Die Trennung der einzelnen Felder verläuft meist geradlinig, scharf, es kommen aber auch Fälle vor, wo die einzelnen Felder mehr oder weniger regelmässig begrenzte Fetzen der Nachbarindividuen einschliessen. Diese pseudo-hexagonalen Drillinge nach (110) sind ziemlich verbreitet. Bereits wurde erwähnt dass nur Pseudomorphosen nach Cordierit vorhanden sind; jedoch wurde in einem Individuum, im zentralen Teil, unveränderter Cordierit gefunden. Mit dem Universal-Drehtisch wurde bestimmt, dass der Cordierit zweiachsig negativ ist mit $2V = 76^\circ$. Die Doppelbrechung ist niedrig, ungefähr wie Quarz. Pleochroismus wurde nicht beobachtet. Als Einschlüsse in den Cordieritpseudomorphosen findet man hauptsächlich Apatit, weniger Zirkon, etwas Erz (Magnetit) und selten Rutil. Zum Teil wird Rutil als dünne Stäbchen von den Apatitkörnern eingeschlossen. In einigen Pseudomorphosen kann man dunkel gelbbraune Ränder um die kleinen Zirkonkristalle beobachten. WEINSCHENK³⁾ gibt an, dass pleochroitische Höfe in den Pseudomorphosen der Cordierite oft noch als gelbbraune Flecken erhalten bleiben.

Die Umwandlung der Cordierite, die zu verschiedenen Pseudomorphosen führt, ist von vielen Autoren untersucht worden, hauptsächlich von WICHMANN⁴⁾ und GAREISS⁵⁾, die beide zu ungefähr gleichen Resultaten kamen. WICHMANN untersuchte den ganzen Verlauf des Prozesses und fand, dass der Cordierit sich nicht sofort in Muskovit umwandelt, sondern dass zwischen dem frischen Cordierit und dem Endprodukt ein Stadium liegt, in dem das ursprüngliche Mineral isotrop wird. Die in diesem Stadium sichtbare isotrope Masse nannte er „Zwischensubstanz“. Im allgemeinen stimmt der Umwandlungsprozess mit dem von WICHMANN und GAREISS beobachteten überein. Die isotrope bis sehr schwach anisotrope „Zwischensubstanz“ kann man an verschiedenen Pseudomorphosen beobachten. Diese Substanz ist immer gelbgrau bis gelbbraun, bisweilen sehr dunkelbraun. Die meisten Cordierite sind aber weiter zersetzt worden und haben mehr oder weniger breite Ränder und Adern von muskovitischer (sericitischer, pinitischer) und chloritischer Substanz gebildet, während im Zentrum noch Kerne dieser „Zwischensubstanz“ erhalten sind (Abb. 2). Auch serpentinarartige Umwandlungsprodukte können in mehreren Pseudomor-

³⁾ E. WEINSCHENK, „Die gesteinsbildenden Mineralien“. Freiburg i/B. 1915. S. 222; auch: K. CHUDOBA, „Mikroskopische Charakteristik der gesteinsbildende Mineralien“, Freiburg i/B. 1932, S. 123.

⁴⁾ A. WICHMANN, „Die Pseudomorphosen des Cordierits“. Zeitschr. D. Geol. Gesel. Bd. 26, 1874, S. 675.

⁵⁾ A. GAREISS, „Ueber Pseudomorphosen nach Cordierit“. Tscherm. Min. und Petr. Mitt. Bd. 20, 1901, S. 1.

phosen beobachtet werden. Viele Cordierite sind vollkommen umgewandelt in die Endprodukte. Im Dünnschliff ist ihre Farbe grüngelb bis braun. Der grösste Teil der Pseudomorphosen wird zweifellos von grünlich bis bräunlich gefärbten chloritischen Fasern mit kleinen Auslöschungswinkeln und mit niedriger Doppelbrechung gebildet (gelegentlich mit auf Pennin deutenden anomalblauen Interferenzfarben und mit positivem Charakter der Hauptzone). Meistens liegen die Blättchen oder Fasern ziemlich wirt durch-einander, zuweilen sind in bestimmten Partien die Fasern parallel gerichtet oder besteht die ganze Pseudomorphose aus parallel angeordneten Fasern, sodass eine fast vollständig gleichzeitige Auslöschung zwischen gekreuzten Nikols stattfindet. (Abb. 3). Bräunlich gefärbte, limonitische Substanz bildet gelegentlich die Randzone der Pseudomorphosen. Aehnliche Cordieritpseudomorphosen erwähnt H. DE JONG⁶⁾ von Cordieritgesteinen des Kaibobogebietes (West-Ceram).

In H. 177^x ist an einer Cordieritpseudomorphose Folgendes zu beobachten (Abb. 4). Eine ziemlich breite Randzone besteht aus Alkalifeldspat (sehr wahrscheinlich Albit) und grünen, stark pleochroitischen Chloritblättchen. Auf der Grenze zwischen dieser Zone und dem Kern folgt ein schmaler Rand Sericit; der Kern selber ist aufgebaut von abwechselnd schmalen Fasern farblosen Sericits und gelb bis sehr dunkelbrauner chloritischer und isotroper Substanz.

In H. 134 wurden zwei Cordieritpseudomorphosen beobachtet; die eine ist ein Durchkreuzungsdrilling, während die andere einen kurzprismatischen Schnitt, gebildet von schönen radialstraligen Mineralien der Epidotgruppe, zeigt. Epidot (Pistazit) mit lebhaften Interferenzfarben und auch Zoisit mit sehr niedriger Doppelbrechung kommen vor. Zwischen den nach „b“ säulenförmigen Durchschnitten der Mineralien der Epidotgruppe und den Schnitten senkrecht zur Säule mit sechseckigen oder rhombenähnlichen Umrissen sind wiederum eine sehr schwach anisotrope, bräunliche Substanz und Chlorit vorhanden. Apatitkörner sind auch hier, wie in fast allen Cordieritpseudomorphosen, eingeschlossen. (Abb. 5.)

Es ist wahrscheinlich dass zuerst das ganze Cordieritindividuum umgewandelt wurde in den muskovitischen und chloritischen Produkten, ausserhalb im Zentrum, wo vielleicht noch etwas isotrope und chloritische Substanz vorhanden ist. Dass nachher die albitisierenden Lösungen diese Pseudomorphose weiter angegriffen haben, scheint hervorzugehen aus der Umwandlung in Albit. Z. B. BENSON⁷⁾ beschreibt aus dem Tamworth-Distrikt Keratophyre mit Albitpseudomorphosen nach Pyroxen. Auch in unserem Fall haben ähnliche metasomatischen Prozesse stattgefunden.

Auch die Pseudomorphose von Epidotmineralien nach Cordierit (H. 134)

⁶⁾ H. DE JONG, „Studien über Eruptiv- und Mischgesteine des Kaibobogebietes“. Rutten-Hotz Geol. Petr. and Palaeont. Results of Expl. in the island of Ceram, 1923.

⁷⁾ W. N. BENSON, „The Geology and Petrology of the Great Serpentine Belt of New South Wales“. Part V. „The Geology of the Tamworth District“. Proc. Linnean Soc., N. S. W., vol. XL, 1915, S. 596.

kann in ähnlicher Weise erklärt werden; auch hier ist es wahrscheinlich dass der Cordierit in den muskovitischen und chloritischen Produkten



Rand von Albit und Chlorit.



Dunkelbraune }
Gelbraune } chloritische Substanz.



Farbloser Sericit.

umgewandelt worden ist, und dass nachher die Epidotminerale gebildet wurden. Leider wurde nur eine einzige derartige Pseudomorphose angetroffen, während in den anderen Cordieritpseudomorphosen gar keine Minerale der Epidotgruppe vorhanden sind. Als Sekundärbildung im Gestein wurde Epidot-Zoisit schon erwähnt, sodass es sich in diesem Fall möglicherweise lokal um eine Konzentration von Epidot handelt. Das für die Bildung des Epidots benötigte Kalzium kann geliefert sein von den albitisierten Plagioklasen, die möglicherweise ursprünglich im Gestein

vorhanden waren. Ungenügend erklärt bleibt dabei weshalb nur eine einzige derartige Pseudomorphose in den zwanzig untersuchten Schliffen angetroffen wurde.

Entstehung der Cordierite.

Um die Entstehung der Cordierite zu erklären, möchte ich zuerst auf einige andere Vorkommen von cordieritführenden Gesteinen hinweisen. SCHROEDER VAN DER KOLK⁸⁾, VERBEEK⁹⁾ und besonders BROUWER¹⁰⁾ erwähnen cordieritführende Dazite von Ambon. H. DE JONG¹¹⁾ gibt eine ausführliche Beschreibung von den bereits erwähnten Cordieritgraniten von Ceram. In beiden Gebieten handelt es sich um zweierlei Einschlüsse: um homoeogene und enallogene Einschlüsse (Systematik von A. LACROIX¹²⁾). Erstere sind in ihrem stofflichen Bestand eng mit dem einschliessenden Gestein verbunden, während die enallogenen Einschlüsse keine Beziehung zum einschliessenden Gestein zeigen. Es sind mitgerissene Stücke des Nebengesteins.

Diese Einteilung lässt sich auch anwenden auf die Einschlüsse der Cordieritandesite von Hoyazo (Cabo de Gata), wie dies von HETZEL¹³⁾ und später von BURRI und PARGA PONDAL¹⁴⁾ getan worden ist, sowie auf die Cordieritführenden Laven von Mazarron, die von PATIJN¹⁵⁾ in gleicher Weise erklärt wurden. Auch SUGI¹⁶⁾ erwähnt derartige Erscheinungen in cordieritführenden Graniten im Tsukuba-Distrikt, während die neulich von BAKER¹⁷⁾ beschriebenen Cordieritgranite von Victoria ähnliche Erscheinungen zeigen wie die von mir untersuchten Illipoi-Sanidin-Albit-Rhyolite.

Diese Rhyolite sind frei von homoeogenen und enallogenen Einschlüssen. Für den Cordierit muss direkte Auskristallisation aus dem Magma ange-

⁸⁾ J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK, „Mikroskopische Studien über Gesteine aus den Molukken“. I. Gesteine von Ambon und den Uliassern. Jaarb. v. h. Mijnwezen in Ned. O. Indië. 1895. Wetensch. II en Techn. Adm. Gedeelte.

⁹⁾ R. D. M. VERBEEK, „Geologische beschrijving van Ambon“. Jaarb. v. h. Mijnwezen in Ned. Indië. 1895. Wetensch. gedeelte.

¹⁰⁾ H. A. BROUWER, „Over insluitsels en cordierietgehalte van Bronziet-biotiet-dacieten van het eiland Ambon“. Verh. v. h. Geol. Mijnb. Gen. v. Ned. en Kol. Geol. serie, dl. III, 1925.

¹¹⁾ H. DE JONG, loc. cit.

¹²⁾ A. LACROIX, „Les enclaves des Roches volcaniques“. Mâcon 1893.

¹³⁾ W. HETZEL, „Bijdrage tot de geologie van de Sierra Alhamilla (Provincia Almeria). Delft 1923.

¹⁴⁾ C. BURRI & T. PARGA PONDAL, „Neue Beiträge zur Kenntnis des granatführenden Cordieritandesit von Hoyazo bei Nijar. (Prov. Almaria, Spanien)“. Schweiz. Min. und Petr. Mitt. Bd. XVI. Heft 1, 1936.

¹⁵⁾ R. J. H. PATIJN, „Onderzoekingen in de oostelijke Betische Cordilleren“. Diss. Amsterdam 1937.

¹⁶⁾ K. SUGI, „On the granitic rocks of Tsukuba-district and their associated Injection Rocks“. Jap. Journ. of Geol. and Geogr. Vol. VIII, 3, 1931.

¹⁷⁾ G. BAKER, „Cordierite granite from Terip-Terip, Victoria“. Journ. of Min. Soc. of America, 1940, Vol. 25, 8.

nommen werden. Für diese Meinung spricht die idiomorphe Begrenzung von fast allen Kristallen. Diese pyrogenetische Entstehungsweise der Cordierite kann erklärt werden durch Assimilation von Tonerdesedimenten, also durch Aluminiumanreicherung des Magmas. In den oben erwähnten anderen Vorkommen von cordieritführenden Gesteinen sahen wir, dass immer Aluminiumanreicherung des Magmas durch Tonerdesedimente (z.B. Cordieritgneise, Cordierithornfelse) stattgefunden hat.

In den Illipoi-Rhyoliten gehören die Cordierite zu den ersten Mineralien, die aus dem Magma auskristallisiert sind, weil Cordieritpseudomorphosen von Quarz- und Sanidineinsprenglinge eingeschlossen werden. (Abb. 6).

Sporadisch sind die Cordierite korrodiert; die Einbuchtungen werden von Grundmassematerial, besonders Quarz und Albit, ausgefüllt.

Infolge der nachherigen Zufuhr von Mengen alkalisches Material aus dem Magma sind die verschiedenen Umwandlungsprodukte der Cordierite entstanden. Dass alkalische Lösungen im Gesteine zirkuliert haben, zeigen die schönen Albitisierungserscheinungen der Feldspäte, besonders der Sanidineinsprenglinge. Eine eingehendere Beschreibung dieser Erscheinungen wird in einer späteren Publikation gegeben werden.

Amsterdam, Geologisches Institut.



Abb. 2.

Längsschnitt einer Cordieritpseudomorphose.
Die rechteckig begrenzten, hellen Teile im Zentrum werden gebildet von isotroper „Zwischensubstanz“, während der übrige Teil der Pseudomorphose von chloritischen und muskovitischen Fasern aufgebaut ist. (// Nikols; Vergröss. $\times 71$.)



Abb. 3.

Pseudohexagonaler Drilling von Cordierit umgewandelt in Muskovit und Chlorit. Der grösste Teil der umgewandelten Cordierite ist ein Granophyr. (+ Nikols; Vergröss. $\times 125$.)

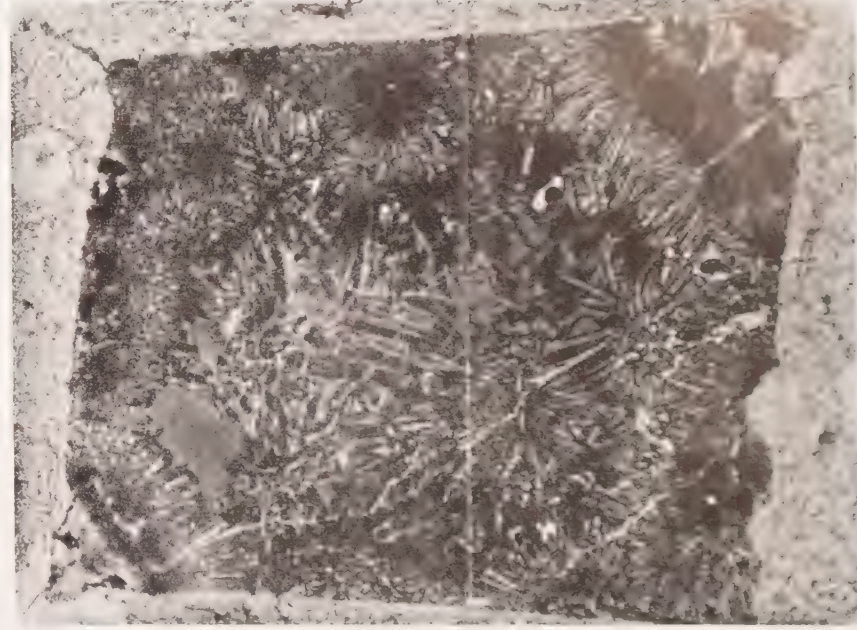


Abb. 4.

Pseudomorphose von Mineralien der Cordieritpseudomorphose.
+ Nikols; Vergröss. $\times 71$.)



Psychology. — *Die menschlichen Kommunikationsformen und die sog. Tiersprache.* III ¹⁾. Von G. RÉVÉSZ. (Communicated by Prof. A. DE KLEYN.)

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

III. *Der Kontakt der Tiere.*

7. *Der Kontakt der Tiere untereinander.*

Dass Tieren weder aktive noch passive Sprachfunktion zuzuschreiben ist, steht nach dem Gesagten ausser Zweifel. Demgegenüber steht es fest, dass Kommunikationen zwischen den Tieren untereinander und zwischen Tieren und Menschen bestehen. Die Frage, die wir zunächst zu beantworten haben, ist, ob die sprachlosen Kommunikationsformen der Tiere, wie die Fühlerbewegungen der Ameisen, der Tanz der Bienen, die Lock- und Warnrufe der verschiedenen Tiersorten, der „Gesang“ der Vögel, die Stimmäusserungen der Affen, Hunde, Elephanten u.s.w. vollkommen instinktiv vor sich gehen, oder ob ihnen — wenngleich gelegentlich — eine Mitteilungstendenz oder gar eine zielbewusste Absicht zu Grunde liegt.

Dass bei *nicht-gerichteten, nicht-adressierten* tierischen Aeusserungen eine solche Tendenz nicht vorauszusetzen ist, liegt auf der Hand. Stösst ein Tier im Furchtzustand einen Laut aus, der zu Folge hat, dass seine Artgenossen die Flucht ergreifen, dann liegt kein Grund vor, anzunehmen, dass das Tier dabei von der Tendenz geleitet wurde, seine Artgenossen vor der Gefahr zu warnen. Der Lautausdruck dient vielmehr dazu, in den Genossen reflektorisch Furcht zu erwecken, die sie instinktiv zur Flucht drängt.

Bezeichnet man die Lautäusserung in diesen Fällen mit „Warnruf“, so interpretiert man in die Fluchtreaktion etwas hinein, was in ihr nicht vorhanden ist. Auch wir Menschen stossen bei ähnlichen Gelegenheiten Laute (Interjektionen) aus, ohne damit etwas kundgeben zu wollen, und trotzdem können diese subjektiven Ausdrucksmomente zweckdienliche Reaktionen anderer Menschen nach sich ziehen. Fühlt sich der menschliche Säugling unwohl, unbehaglich, so beginnt er zu schreien. Das Kind „teilt“ seiner Umgebung seinen Zustand nicht mit, es fordert niemanden auf, ihm zu helfen, trotzdem wird der Schrei als Kundgabe seiner unangenehmen Lage aufgefasst, was seine Umgebung zu zweckentsprechenden Handlungen veranlasst.

¹⁾ Teil I und II siehe Proc. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, 43, 1078 und 1322 (1940).

Auch die Biene, die ein reiches Honigfeld entdeckt, führt im Korb nicht darum eine tanzende Bewegung aus, um ihre Artgenossen über den Fund zu benachrichtigen und das Bienenvolk etwa aufzufordern, das neu entdeckte Feld zu befliegen. Das ganze Schauspiel ist viel einfacher zu erklären. Die reichhaltige Nahrung löst bei den Bienen eine eigenartige drehende Bewegung aus, die zur Folge hat, dass die anderen durch die Bewegung und den mitgebrachten Geruch gereizt, ausfliegen und die Umgebung nach Honig absuchen.

Anders steht es in dieser Hinsicht mit den *gerichteten, adressierten* Aeusserungen der Tiere. Demonstrieren wir den Sachverhalt an einem bereits angeführten Beispiel, am Lockruf der Henne. Die Lautäusserung des Tieres stellt in diesem Falle — im Gegensatz zu den nicht-gerichteten Lautäusserungen — nicht bloss den subjektiven Erregungszustand der Henne dar, sondern der ertönte Ruf wird direkt an die Küchleins adressiert mit dem Zweck, sie zu einem soeben entdeckten guten Bissen herbeizurufen oder bei einer bevorstehenden Gefahr um das Muttertier zu sammeln. Das Gerichtetsein der Henne setzt keine Absicht zur Kundgabe, keine durch Zielvorstellung bestimmte Handlung voraus. Viel wahrscheinlicher ist die Annahme, dass ein vitales Bedürfnis (Brutsorge) im Muttertier gewisse spezifische Instinkthandlungen auslöst, die kraft ihrer Eigennatur zwischen den Beteiligten einen lebendigen Kontakt zustande bringen und zielstrebig (nicht zielbewusst!) wirken. Wir Menschen können uns einen solchen Kontakt ohne Absicht schwer vorstellen. Beachten wir indessen die Verhaltensweisen des Muttertieres während dieser Situation, insbesondere die Disharmonie, die oft zwischen dem stark-affektbetonten Ruf (bzw. der Bewegung) einerseits, der Erwartung der Reaktion andererseits auftritt, wenn nämlich infolge einer ziemlich unbedeutenden Ursache das Tier mit dem Lockruf plötzlich aufhört; fassen wir ferner die nicht selten zu beobachtende Gleichgültigkeit der Henne gegenüber der Erfolglosigkeit ihres Strebens ins Auge und die Beschränktheit und Gleichförmigkeit der Aeusserungsform bei veränderten Situationen, so wird uns klar, dass ein solcher Reiz-Reaktions-Komplex von viel primitiverer Beschaffenheit sein muss als eine entsprechende durch Absichten determinierte Handlung bei uns. Der Henne braucht kein Ziel vorzuschweben, um ihre Kleinen zu warnen und ausserhalb der Gefahrzone zu bringen. Es genügt, wenn bestimmte Veränderungen in der Umwelt das Muttertier in affektive Erregung setzen, die ihrerseits infolge der regulatorischen Funktion des Mutterinstinktes das Bedürfnis erwecken, zu den Küchlein in Kontakt zu treten, sie um sich zu sammeln und gemeinsam die Flucht zu ergreifen oder Widerstand zu leisten. Es muss in diesem Fall weder Antizipation des Erfolges, noch Zielsetzung vorliegen. Der ganze Vorgang läuft nach einem erbbiologisch vorgebildeten und instinktiv in Aktion gesetzten dynamischen Plan ab, wobei der individuellen Erfahrung nur eine sehr bescheidene Rolle zukommt. Der ganze Vorgang ist in allen seinen Etappen durch vorgebildete Instinkthandlungen determiniert und verläuft

gesetzmässig, ohne spontanes Eingreifen seitens des Individuums. Für die Richtigkeit dieser Deutung spricht auch der Umstand, dass die Erklärung dieses Tatbestandes durch Absicht gewisse Konsequenzen nach sich ziehen würde, die im schroffen Gegensatz zu unseren tierpsychologischen Erfahrungen und zu den Ergebnissen der Denk- und Willenspsychologie stehen.

Die Triebhaftigkeit dieser Lebensäusserungen müssen umsomehr betont werden, da eine ziemlich verbreitete Ansicht ist, jede solche Aktion und die darauf erfolgte Reaktion als eine Art von *Dialog* aufzufassen. Das Krähen der Hähne wird mit Vorliebe als Frage und Antwort gedeutet. „Der Hahn will gerade durch sein Krähen recht laut den Nachbarhähnen zu verstehen geben, dass er noch da ist und bereit ist, sein Heim, das Wohn- und Nahrungsgebiet seiner Herde gegen jeden Eindringling zu verteidigen“ (KL. BREHM, S. 297). Der richtige Tatbestand ist indessen, dass die Einsamkeit, die Furcht, die Unruhe, die Nahrungsnot bei gewissen Tieren spezifische Laute und Bewegungen auslösen, die die anderen Tiere reflektorisch oder instinktiv zur entsprechenden Verhaltensweise drängt, wie etwa zur Flucht, zum Kampf, zum Versammeln.

Die allermeisten Lautäusserungen der Tiere, wozu auch die meisten Lock- und Warnrufe zu gehören scheinen, sind demnach Gefühls- und Triebäusserungen des individuellen Tieres, ohne kundgebende Absicht, ohne zielbewusstes Gerichtetsein, die trotzdem mit biologisch zweckmässigen Reaktionen „beantwortet“ werden. Diese Fälle der Kommunikation, insofern man sie in der obigen Weise interpretiert, lassen sich als Zwischenformen der obendargelegten sozialen und autistischen Kommunikationsarten betrachten: die Lautäusserung dient dem Lebensinteresse des einen Teiles, während der andere Teil davon triebhaft Nutzen zieht.

Was uns bei diesen Fällen des Kontaktes interessiert, ist die Erkenntnis, dass zwischen Tieren ein wechselseitiger Kontakt auch ohne Absicht zustande kommen kann, einfach auf Grund der nach Befriedigung strebenden vitalen Bedürfnisse. Ob bei Tieren noch ein anderes, psychologisch tiefer fundiertes Kontaktverhältnis besteht, werden wir im folgenden Kapitel sehen.

8. Der Kontakt mit Menschen.

Beobachtungen an Tieren scheinen keine Tatsachen zu liefern, die mit Bestimmtheit darauf hinweisen, dass Tiere sich *absichtlich* an ihre Artgenossen richten, ihr Verlangen anderen Tieren gleichsam kundgeben. Beobachten wir indessen die Beziehungen zwischen Menschen und Tieren, so entdecken wir bald tierische Verhaltungen, die nach dieser Richtung zu weisen scheinen.

Es ist allgemein bekannt, dass Hunde ihre Herren, wenn sie sich nach Leckerbissen oder nach Liebkosen sehnen, mit der Nase schubsen und mit dem Pfoten kratzen. Oefters wird beobachtet, dass Hunde und Katzen ihr Bedürfnis das Zimmer zu verlassen dadurch „kundgeben“, dass sie sich vor der Tür aufstellen und ihren Kopf einer ihnen vertrauten Person

zuwenden, gelegentlich noch einen eigenartigen Laut von sich geben. Man gewinnt den Eindruck, als ob die Tiere durch Zuwendung des Kopfes, um Hilfe der betreffenden Person bitten würden. Es kommt auch oft vor, dass diese Haustiere uns direkt aufsuchen und mit Lauten und Bewegungen gleichsam zwingen, ihnen zu folgen. Sie lassen sich hierbei nicht leicht abschütteln, wiederholen ihre „Aufforderung“ so lange hartnäckig, bis man ihre Wünsche erfüllt. Ähnlich verhält es sich, wenn Affen mit Schreien und Klopfen am Gitter die Aufmerksamkeit der Wärter auf sich ziehen, um von ihnen gewisse Gunstbezeugungen zu erwirken, oder ihre offenen Hände hinhalten, wenn sie etwas, was sie in der Hand des Menschen erblicken, begehren.

Es ist wichtig darauf hinzuweisen, dass es sich im Gegensatz zu den im vorigen Kapitel beschriebenen adressierten Kommunikationsformen in diesen Fällen nicht um instinktive, vererbte, sondern um spontane, individuell erworbene Verhaltensweisen handelt, also um solche, die das Tier aus *eigenem Antriebe*, auf Grund von *eigenen Erfahrungen* ausführt und die eng mit der *individuellen* Veranlagung des Tieres zusammenhängen.

Wie vorsichtig man bei der Deutung solcher spontanen Ausdrucksbewegungen auch vorgehen mag, wird man darin immerhin eine Art von spontaner Kundgebung bezüglich eines erstrebten Zieles sehen müssen, die an bestimmte Personen, von denen das Tier auf Grund bisheriger Erfahrungen die Befriedigung seines Bedürfnisses erwartet, gerichtet ist. Das Tier versucht, die Aufmerksamkeit auf sich zu lenken, und bemüht sich das erstrebte Ziel in irgendeiner uns verständlichen Weise anzudeuten.

Ganz analogen Fällen begegnen wir bei Kindern während der vorsprachlichen Periode. Unzählige Male beobachten wir, wie das kleine Kind, das der Sprache noch nicht mächtig ist, seine Arme nach der Mutter ausstreckt, um auf den Schoß genommen zu werden, oder durch Schreien und Stampfen mit den Füßen den Wunsch kundgibt, aufgehoben oder nach einem anderen Platz gebracht zu werden.

Diesen spezifischen Verhaltensweisen liegt unserer Ansicht nach eine besondere Funktion zugrunde, die wir „*Aufforderungsfunktion*“ bezeichnen wollen. Unter dieser Funktion verstehen wir die Fähigkeit, *an bestimmte Personen durch Andeutung des erstrebten Zieles Wünschäusserungen zu richten und sie zu einer dem Wunsch entsprechenden Handlung zu veranlassen*.

Diese Wünschäusserungen spielen sich bei den Tieren innerhalb sehr enger Grenzen ab. Sie beziehen sich auf elementar-vitale Bedürfnisse, die an sich einen streng triebhaften Charakter tragen. Das Ziel wird durch das Benehmen des Tieres in irgendeiner Weise *angedeutet*, aber nie gegenständlich angegeben. Niemals *weist* das Tier auf das Objekt des Begehrens, auch dann nicht, wenn es mit Händen ausgestattet ist. Und das kann auch nicht anders sein, da das Weisen — wie bereits ausgeführt worden ist — eine Modalität der Sprachfunktion ist, die bei Tieren fehlt.

Mit Aufforderungsfunktion scheinen nur solche Tiere ausgestattet zu sein, die in innigem Kontakt mit den Menschen stehen und infolge der Domestikation die Hilfe der Menschen vielfach in Anspruch nehmen müssen. Allerdings genügt die Domestikation in Verbindung mit der Dressur, Gewohnheitsbildung und der künstlichen Zuchtwahl für die Entstehung bzw. Manifestation der Aufforderungsfunktion nicht. Es muss eine besondere Disposition dafür bereits vorliegen, eine solche, die ein relativ entwickeltes psychisches Niveau und eine differenzierte Anpassungsfähigkeit an die menschliche Umgebung voraussetzt, denn sonst müssten wir bei allen domestizierten Tieren dieses Verhalten vorfinden, was bekanntlich nicht der Fall ist.

Bei oberflächlicher Beobachtung gewinnt man allerdings den Eindruck, als ob ausser den Affen und einigen, an Zahl sehr beschränkten Haustieren, auch bei anderen Tieren ähnliche Verhaltensweisen sich nachweisen liesse. Bei näherem Studium indessen zeigt sich, dass man zwischen Hunden, Katzen und in menschlicher Umgebung lebenden Affen einerseits, den übrigen Tieren andererseits in dieser Beziehung einen wesentlichen Unterschied machen muss. Auch Pferde, Kühe, Schweine, Hühner bleiben z.B. vor der Stalltür oder vor der Futterkiste stehen, um in den Stall hineingeführt bzw. gefüttert zu werden. Auch das Wild im Reservat oder in den zoologischen Gärten sammelt sich zu bestimmten Zeiten an einem bestimmten Platz, wo ihnen Futter dargeboten wird. Diese Tiere machen aber nicht den geringsten Versuch mit den Menschen in Kontakt zu treten, rühren sich nicht von der Stelle, warten mit einer oft an Stumpfsinnigkeit grenzenden Geduld ab, bis etwas geschieht oder geraten in Aufregung.

Ganz anders verhalten sich Tiere, die ihre Bedürfnisse nicht nur durch bestimmte Laute und Bewegungen zum Ausdruck bringen und infolge biologischer Zielstrebigkeit eine Verbindung mit Menschen herstellen, sondern auch imstande sind, einen wichtigen Schritt vorwärts zu machen, indem sie versuchen, eine bestimmte Person oder bestimmte Personen gleichsam „aufzufordern“, um bei Erreichung ihres Zieles mitzuwirken. Sie teilen ihre Wünsche natürlich nicht mit, — das könnte nur mittels der Sprache geschehen, — aber durch den Akt des Zuwendens und Zulaufens in Verbindung mit gewissen Lautäusserungen (bei Affen Hantierungen, bei Hunden Körperbewegungen) geben sie ihrem Begehren in mehr oder weniger deutlicher Weise Ausdruck und veranlassen den Menschen zu einer zweckdienlichen Handlung.

In diesem Zusammenhang möchte ich nicht versäumen darauf hinzuweisen, dass die Möglichkeit solcher spontanen, zielgerichteten Kontaktäusserungen auch zwischen Tieren nicht auszuschliessen ist. Denn, wenn Tiere Menschen gegenüber solche Verhaltensweisen zeigen, so lässt sich nicht von vornherein ausschliessen, dass sie sich dieser entwickelten Form des Kontaktes gelegentlich auch ihrer Artgenossen gegenüber bedienen. Gewisse Ansätze dafür sehe ich im Klagen, Jammern der kleinen Affen und in ihren „flehenden“ Blicken, die sie den stärkeren zuwerfen, wenn

diese sich der ihnen zugeworfenen Leckerbissen bemächtigen, und bei Schimpansen, die aus eigenem Antrieb von den aufgesammelten Bananen eine den anderen reichen. Gewisse Verhaltensweisen beim Sexualverkehr lassen sich auch in diesem Sinne deuten. Dass zwischen Tieren die Aufforderungsfunktion nicht oder nur äusserst selten in Wirkung tritt, liegt vermutlich darin, dass sie jedes altruistischen Gefühls bar, den Äusserungen ihrer Genossen nur dann Beachtung schenken, wenn sie selbst daran interessiert sind.

Der eingeführte Begriff der Aufforderungsfunktion verpflichtet uns, das Verhältnis dieser spezifischen Kontaktfunktion zu der *Sprache* zu diskutieren.

Zunächst muss darauf hingewiesen werden, dass die Aufforderungsfunktion als solche die Sprachfunktion nicht voraussetzt. Zwar werden die Aufforderungen gewöhnlich in sprachlicher Form gegeben, doch ist das keineswegs unerlässlich. Auch ohne Sprache kann jemand zu einer Handlung aufgefordert werden, vorausgesetzt, dass es sich um einfache Situationen und bekannte Ziele handelt.

Unsere Frage lautet also: Weisen die Aufforderungsakte der Tiere solche Merkmale auf, die auch bei ihrer sprachlichen Form aufzuzeigen sind?

Dass der Aufforderungsakt der spezifischen Funktionen der Sprache vollkommen entbehrt, bedarf keines Beweises. Das Zuwenden, das Zulaufen, der auffordernde Ruf bilden keine Ausdrucksformen der Nenn-, Darstellungs- und symbolischen Funktion. Demgegenüber lässt sich nicht leugnen, dass das Tier auf etwas bestimmtes „hinweist“, gleichsam „hindeutet“, sein Verlangen durch sinnvolles Verhalten kundgibt und sich dabei an bestimmte Personen wendet mit der nicht misszudeutenden Tendenz, sie bei der Erfüllung seines Verlangens zur Mitwirkung zu veranlassen. Das ist zwar noch keine Sprache, aber jedenfalls eine besondere Art der adressierten Kundgebung, die unter Umständen auch wir Menschen verwenden. Der Unterschied liegt darin, dass unsere derartigen Handlungen eben sprachbezogen sind, die der Tiere dagegen nicht.

Der Mangel an Sprachbezogenheit ist der Grund, warum man die tierische Aufforderungsfunktion — wie bedeutungsvoll sie auch sein mag — von der menschlichen prinzipiell trennen und von der Mitteilungsfunktion unterscheiden muss. Eine Identifizierung beider kommunikativen Aktivitäten würde ausserdem Vorstellungen erwecken und Konsequenzen nach sich ziehen, die eher dazu führen würden, die soeben gewonnene Erkenntnis wieder aufzuheben als zu erweitern. Obgleich also die Aufforderungsfunktion in ihrem *Effekt* unzweifelhaft einige Ähnlichkeit mit der Mitteilungsfunktion aufweist, darf man die beiden doch nicht gleichsetzen, ohne Gefahr zu laufen, den Tieren solche Funktionen zuzuerkennen, die sie sicher nicht besitzen.

All dies darf uns davon nicht abhalten, diesem Komplex von Ausdruck und Aufforderung eine besondere Stellung im System der Kommunikations- bzw. Kontaktformen zuzuweisen, zumal wir dieser ursprünglichen Auf-

forderungsfunktion auch in der ersten Sprachentwicklung des Kindes begegnen, was einen entwicklungsgeschichtlichen Zusammenhang der menschlichen mit den tierischen Kontaktformen erkenntlich macht.

Die letzte Frage, die noch der Beantwortung harrt, ist, ob man dieser sprachlosen und gebärdenlosen Aufforderungsform eine *Absicht* zugrunde legen darf.

Wenn wir einen Hund beobachten, der seinen Herrn „auffordert“ ihn hinauszulassen oder ihm zu folgen, so können wir uns schwer von dem Eindruck befreien, dass diese Äußerung nicht ohne Zielbewusstheit, ohne Absicht zustande gekommen wäre. Andererseits sind wir nicht in der Lage überzeugende Beweise dafür zu liefern, dass dieser, an bestimmte Personen gerichtete Aufforderungsakt mit Absicht geschieht.

Es wäre ein Irrtum zu glauben, dass die aufgeworfene Frage etwa auf Grund tierpsychologischer Beobachtungen zu beantworten wäre. Wir würden uns einer Täuschung hingeben, wenn wir eine befriedigende Antwort von weiteren tierpsychologischen Beobachtungen erwarten würden. Es kommt hier nicht auf ergänzende Erfahrungen, sondern auf *Interpretation* der vorliegenden Tatsachen an, die aber ohne theoretische Grundanschauung unausführbar ist. Die Grundansicht wird in erster Instanz davon abhängen, was wir unter Absicht verstehen. Rechnen wir die Absicht zu jenen psychischen Einstellungen, die mit Denkoperation (und Sprachfunktion) unverbrüchlich verbunden sind, dann kann diesen Aufforderungsakten selbstverständlich keine Absicht zugrunde liegen. Dasselbe gilt, wenn bei absichtlichen Handlungen eine „bewusste“ Zielsetzung vorausgesetzt wird, wenn man der Meinung ist, dass Absicht ohne antizipierende Zielvorstellung nicht denkbar ist. Glauben wir indessen bei der Erklärung der dargestellten tierischen Leistungen und Verhaltungen ohne zielstrebende Absicht nicht auszukommen, so entstehen Schwierigkeiten, die nicht zu umgehen sind. Jedenfalls muss zunächst geprüft werden, ob eine Wesensanalyse des tierischen Verhaltens eine absichtliche Handlung überhaupt in den Bereich der Möglichkeiten stellt. Wir wollen uns an diesem Ort begnügen, auf theoretische Gesichtspunkte hingewiesen zu haben, und wollen einstweilen daran festhalten, dass absichtliche Kommunikation nur bei denkenden, sprechenden und wollenden Subjekten anzunehmen ist.

Wie es auch sein mag, müssen wir jedenfalls der sprachlosen Aufforderungsfunktion in der Tierwelt eine ganz besondere Bedeutung zuerkennen. Meines Erachtens ist die Aufforderungsfunktion die einzige Funktion, die einen, *auf gegenseitigem Verständnis beruhenden wechselseitigen Kontakt zwischen Mensch und Tier* zustande bringt. Sie ist die einzige Funktion, mit deren Hilfe das *Tier* sich an den Menschen wendet, während alle anderen Kommunikationsformen zwischen Mensch und Tier von dem *Menschen* ausgehen. Nur mit Hilfe der Aufforderungsfunktion vermag das Tier spontan eine Verbindung zwischen sich und dem Menschen herzustellen, in allen übrigen Fällen reagiert es auf Äußerungen des Menschen. Nur die Aufforderungsfunktion stellt das Tier in die

Gelegenheit, dem Menschen näherzutreten, mit der Tendenz, etwas von ihm zu verlangen. Das Tier erwartet etwas von ihm, es fordert ihn gleichsam auf, seinem Begehren gemäss zu handeln. Damit geht Hand in Hand, dass es sich ausdrücklich an bestimmte Personen richtet. Der Aufforderungsakt repräsentiert demnach den einzigen *ziel- und persongerichteten Kontakt* zwischen Mensch und Tier. Er stellt eine aus eigenem Antrieb geschaffene Kontaktmöglichkeit her, die auch ohne Sprache, ja ohne eine Disposition zur Sprache, in Wirkung treten kann. Wenn diese Selbstäusserung der Sprache gegenüber auch äusserst beschränkte Verständigungsmöglichkeiten bietet, so müssen wir in ihr doch eine Funktion sehen, die das Tier befähigt, gewisse Bedürfnisse kundzugeben, und sie durch auf innerem Kontakt beruhendes harmonisches Zusammenspiel mit dem Menschen zu befriedigen.

Die Ergebnisse der beiden Untersuchung lassen sich in den folgenden Sätzen kurz wiedergeben:

I. Es gibt Aeusserungen und Verhaltensweisen, die einerseits zwischen Menschen, andererseits zwischen Tieren, schliesslich zwischen Menschen und Tieren *Kommunikation* zustande bringen.

Jede zwischen Individuen und Gruppen bestehende kommunikative Verbindung setzt Gegenseitigkeit des Verhaltens und der Art angepasste Mittel voraus.

Die Kommunikation kann absichtlich oder unabsichtlich, instinktiv oder spontan gerichtet, biologisch oder geistig fundiert sein. Die kommunikative Beeinflussung geschieht mittels Laut, Körperbewegung, Mimik, Gebärde, Zeichen, Signal oder Sprache.

Tiere treten auf verschiedenen Wegen mit einander in wechselseitige Beziehung. Die allgemeine Form sind die (instinktiv) nichtgerichteten Aeusserungen der Tiere, die im Wesen nichts anderes sind als Gefühls- und Triebwirkungen des individuellen Tieres ohne kundgebende Tendenz, die von den Artgenossen trotzdem mit biologisch zweckmässigen Reaktionen beantwortet werden (z.B. der Schreckruf des Tieres beim Wahrnehmen des Feindes, der von den anderen mit Fluchtreaktion beantwortet wird, oder die Fühlersprache der Ameisen, die die anderen zur Abgabe des Speisebreies reizt). Die allermeisten Lautäusserungen der Tiere, selbst die meisten sog. Warnungsrufe, gehören zu dieser Gruppe der Kommunikation.

Eine andere Kommunikationsform bilden die (instinktiv) gerichteten, adressierten Aeusserungen, die einen engen Kontakt zwischen Tieren gleicher Art bewirken, bzw. einen solchen Kontakt voraussetzen. Diese Verbindung charakterisiert sich als interindividueller Kontakt und als eine von beiden Teilen ausgehende Tendenz zum Zusammenwirken mit Hilfe von zweckmässigen und auf die Art abgestimmten Mitteln. (Dieser Kommunikationsform bedienen sich die Männchen zwecks Anlockung der Weibchen.) Auch in diesen Fällen liegt keine direkte Aufforderung, geschweige denn Absicht vor; Instinkte werden mobilisiert, die

kraft ihrer Natur zielstrebig wirken (z.B. Mutterinstinkt, Geschlechtstrieb).

Eine besondere, psychisch fundierte Beziehung besteht zwischen Menschen und domestizierten Tieren bzw. in menschlicher Umgebung lebenden Affen. Diese Beziehung kommt zum Vorschein, wenn Tiere gegenüber bestimmten Personen spontan ihrem Verlangen Ausdruck geben beim Andeuten des erstrebten Zieles (z.B. fordert der Hund seinen Herrn durch Zuwendung des Kopfes und durch Kratzen mit den Pfoten auf, ihm Futter zu reichen). Diese eigenartige, entwicklungspsychologisch äusserst wichtige Verhaltensweise beruht auf einer besonderen Funktion, für die wir den Ausdruck *Aufforderungsfunktion* vorschlagen. Der Aufforderungsakt repräsentiert den einzigen spontanen, ziel- und persongerichteten Kontakt zwischen Mensch und Tier. Die Aufforderungsfunktion befähigt das Tier, gewisse Bedürfnisse kundzugeben und sie infolge eines auf innerem Kontakt beruhenden harmonischen Zusammenspiels mit dem Menschen zu befriedigen.

II. Zum Problem der sog. *Tiersprache* ist folgendes zu sagen:

Die Sprache ist ein anthropologischer Begriff, folglich ist seine Einführung in die Tierpsychologie schon aus diesem Grunde nicht statthaft. Der einzig logisch rechtmässige Ausgangspunkt bei der Behandlung der sog. Tiersprache ist die Begriffsbestimmung der Sprache. Gehen wir von einer Definition der Sprache aus, die alle Arten und alle wesentlichen Funktionen der Sprache umfasst, dann schalten sich sämtliche Aeusserungsformen aus, die uns bei den tierischen bekannt sind. Eine autochthone Tiersprache liesse sich nur dann rechtfertigen, wenn es gelingen würde, eine Tierart zu finden, die über ein solches Laut- und Bewegungssystem verfügt, welches prinzipielle Uebereinstimmungen mit einer der menschlichen Sprachformen aufweist. Die Analyse der Stimmäusserungen der verschiedenen Tierarten bezüglich der Funktion, Struktur und des phonetischen Charakters der tierischen Laute ergaben indessen, dass von einer Tiersprache, die diesen Forderungen entspricht, keine Rede sein kann. Von der Diskussion einer tierischen Gebärdensprache kann man absehen, da Tiere keine Gebärden ausführen, unabhängig davon, ob sie Hände haben oder nicht.

Aus prinzipiellen Gründen sind Tiere unfähig die menschliche Sprache zu verstehen, geschweige denn sie sich anzueignen. Kein Tier versteht unsere Sprache. Alle auf Sprache und Wortverständnis und Sprachtätigkeit gerichteten Versuche mussten demnach misslingen. Wörter, auf die Tiere dressiert werden, werden von ihnen nicht als solche wahrgenommen, sondern sie bleiben Lauteindrücke, in denen keineswegs die in der Sprache relevanten Merkmale zur Geltung kommen.

Die Sprache als solche kann erst dort einsetzen, wo lebende Wesen nicht mehr ausschliesslich durch ihre Instinkte und Affekte beherrscht, sondern durch Ziele und die Einsicht in die zu ihrer Verwirklichung ge-

eigneten Mittel bestimmt werden. Gerade diese Art des Gerichtetseins trennt das menschliche Leben vom tierischen Dasein.

Die Begriffe der Sprache und Tiersprache, die zu vielen Missverständnissen, falschen Fragestellungen und irrtümlichen Lehren Veranlassung gaben und der Klärung des Problems der tierischen Kommunikation entgegenwirkten, müssen demnach aus der Terminologie der Tierpsychologie endgültig gestrichen werden, und an ihre Stelle müssen die wohl definierten Begriffe der kommunikativen Kontakt- und Aufforderungs-funktion treten.
